

Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

12 Luglio 2018

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Verificare che il sistema non ammette soluzioni.
- (3 punti) Utilizzando la decomposizione QR, determinare tutte le soluzioni approssimate del sistema.
- (3 punti) Determinare tutte le soluzioni approssimate del sistema, senza utilizzare la decomposizione QR.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A|b) \Rightarrow$ il sistema non ammette soluzioni.

$$2. F_1 = A^1_{\cdot i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A^2 = A^1 \quad \boxed{F_1 \cdot F_1 = 6}$$

$$F_2 = A^2 - \alpha_{12} F_1 = A^1 - \alpha_{12} A^1 = 0 \quad \boxed{\alpha_{12} = 1}$$

$$F_3 = A^3 - \alpha_{13} F_1 - \alpha_{23} F_2 = A^3 - \frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{2} F_2 =$$

$$= A^3 - \frac{1}{2} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\alpha_{13} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|F_1\| = \sqrt{6} \quad \|F_2\| = \left\| \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

$$\frac{F_2}{\|F_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$${}^t Q b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 & 4/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ x_1 = \frac{2}{3} - x_2, \quad x_3 = 0 \right\} = \text{sol. approssimate}$$

$$2. {}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^t A b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2/3 \\ 2 & 2 & 1 & 4/3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica

$$A \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = p$$

$$b - p = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \in (\text{Im } A)^\perp \quad v.$$

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (4 punti) Dimostrare che A è invertibile, calcolandone il determinante.
2. (2 punti) Calcolare i cofattori C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} , C_{15} .
3. (1 punto) Determinare l'unica soluzione del sistema $AX = e_1$.
4. (1 punto) Sapendo che il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 2$$

determinare l'inversa di A in funzione di A .

$$\begin{aligned} 1. \det A &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. C_{11} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= +2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$C_{13} = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$C_{14} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= +\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$C_{15} = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

3) Per il Teorema di Cramer $X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) Per il Teorema di Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$. Quindi

$$2 \mathbb{1}_5 = A^5 - 9A^4 + 2A^3 - 11A^2 = A^2 (A^3 - 9A^2 + 2A - 11 \mathbb{1}_5)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} A (A^3 - 9A^2 + 2A - 11 \mathbb{1}_5)$$

Esercizio 3. Su $\mathbb{R}^2$ si consideri la funzione bilineare $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $b_A(X, Y) = {}^t X A Y$ dove $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Dimostrare che b_A definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.
2. (1 punto) Calcolare la norma di $e_1 = (1, 0)^t$ ed $e_2 = (0, 1)^t$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}^2, b_A)$.
3. (2 punti) Calcolare il coseno dell'angolo formato da $e_1 = (1, 0)^t$ ed $e_2 = (0, 1)^t$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}^2, b_A)$.
4. (2 punti) Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ composta di autovettori per A ed utilizzare tale base per trovare una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.
5. (1 punto) Utilizzando lo sviluppo di Fourier, scrivere il vettore $v = (2, 4)^t$ come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$.

1. $A = {}^t A$, quindi b_A è simmetrica. Verifichiamo che è definita positiva: come visto a lezione questo è equivalente a dimostrare che gli autovalori di A sono positivi.

$$P_A(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2) \Rightarrow \text{Sp}(A) = \{4, 2\} \subset \mathbb{R}_{\neq 0}.$$

2. Denotiamo con $\|\cdot\|_A$, la norma in $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

$$\|e_1\|_A = \sqrt{b_A(e_1, e_1)} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{3} = \sqrt{a_{33}} = \|e_2\|_A$$

$$3. \cos(e_1, e_2) = \frac{b_A(e_1, e_2)}{\|e_1\| \|e_2\|} = \frac{1}{3}$$

$$4. V_4(A) = \text{Ker}(4I_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_2(A) = V_4(A)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Poniamo } X_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$b_A(X_1, X_2) = {}^t X_1 A X_2 = 2 X_1 \cdot X_2 = 0$$

$\Rightarrow X_1$ e X_2 sono ortogonali in $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

$$\|X_1\|_A = \sqrt{b_A(X_1, X_1)} = \sqrt{4 X_1 \cdot X_1} = 2 \|X_1\| = 2\sqrt{2}$$

$$\|X_2\|_A = \sqrt{b_A(X_2, X_2)} = \sqrt{2 X_2 \cdot X_2} = \sqrt{2} \|X_2\| = 2$$

Poniamo $E_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|_A} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|_A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$B = \{E_1, E_2\}$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

5. $v = b_A(v, E_1) E_1 + b_A(v, E_2) E_2$.

$$b_A(v, E_1) = {}^t v A E_1 = 4 {}^t v E_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$b_A(v, E_2) = {}^t v A E_2 = 2 {}^t v E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow v = \frac{12}{\sqrt{2}} E_1 - 2 E_2.$$

Verifichiamo:

$$\frac{12}{\sqrt{2}} E_1 - 2 E_2 = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \stackrel{v}{=}$$

Esercizio 4. Denotiamo con $\mathbb{P}_n$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale ad n a coefficienti reali. Si considerino i seguenti insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 - x\} \subset \mathbb{P}_1.$$

$$\mathcal{B}_2 = \{p_1(x) = 2 - x, p_2(x) = 1 + 2x, p_3(x) = 1 + x + x^2\} \subset \mathbb{P}_2,$$

1. (2 punti) Dimostrare che $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{P}_1$ e $\mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{P}_2$.

2. (1 punto) Sia $T: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(q_1) = 2p_1 - p_2 + p_3, \quad T(q_2) = p_1 + p_2.$$

Trovare la matrice che rappresenta T nelle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$.

3. (2 punti) Trovare la matrice che rappresenta T nelle basi standard $\mathcal{C}_1 = \{1, x\} \subset \mathbb{P}_1$ e $\mathcal{C}_2 = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{P}_2$.

4. (1 punto) Dimostrare che T è iniettiva.

5. (1 punto) Trovare una base dell'immagine di T .

$$1. \quad \alpha q_1 + \beta q_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(1+x) + \beta(1-x) = 0 + 0x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1 \text{ è lin. ind.} \Rightarrow$$

$\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{P}_1$.

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha(2-x) + \beta(1+2x) + \gamma(1+x+x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_2$ è lin. ind. $\Rightarrow \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{P}_2$.

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 3. & \mathbb{P}_1 & = & \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{T} & \mathbb{P}_2 & = & \mathbb{P}_2 \\
 & \downarrow e_1 & & \downarrow B_1 & & \downarrow B_2 & & \downarrow e_2 \\
 & \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{B_1} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B_2} & \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice cercata è

$$C = B_2 A B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \text{Ker } T = \text{Ker } C.$$

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } C = 2$$

$$\Rightarrow \text{Ker } C = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } T = \{0\} \Rightarrow T \text{ iniettiva.}$$

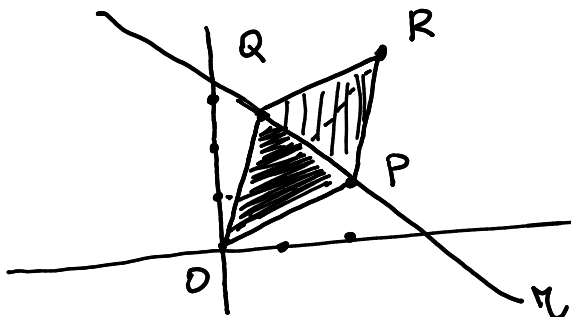
$$5. \quad \text{Im } T \cong \text{Im } C = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \text{Im } T = \langle 7 - 2x + x^2, 1 - 4x + x^2 \rangle$$

Esercizio 5. Calcolare l'area del triangolo del piano euclideo avente vertici P , Q ed R dove $P = (2, 1)^t$, Q è ottenuto ruotando P di un angolo di $\pi/4$ attorno all'origine ed R è il punto ottenuto riflettendo l'origine rispetto alla retta r passante per P e Q .

$$\text{Area } \triangle PRQ = \text{Area } \triangle POQ$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Area } \triangle POQ = \frac{1}{2} \|\hat{P} \times \hat{Q}\| = \frac{\sqrt{2}}{4} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

