

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo il triangolo T di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo T .
2. (1 punto) Stabilire se T è acutangolo o ottusangolo.
3. (1 punto) Trovare il punto P_4 tale che $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_3P_4}$.
4. (1 punto) Trovare il punto H di intersezione della retta passante per P_3 e parallela alla retta passante per P_1 e P_2 con il segmento $\overline{P_1P_4}$.
5. (1 punto) Dimostrare che H è il punto medio del segmento $\overline{P_1P_4}$.
6. (1 punto) Consideriamo i seguenti punti O, A, B e C :

$$\begin{array}{ccccc} & & & A \bullet & \\ & & & & \\ C \bullet & & O \bullet & & \\ & & & & \\ & & & B \bullet & \end{array}$$

Trovare il punto D tale che $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

7. (1 punto) Dati due punti $P, C \in \mathcal{E}^2$ ed un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$, scrivere la formula per trovare il punto Q ottenuto ruotando in senso orario il punto P attorno al punto C dell'angolo θ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo le due rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
2. (2 punti) Trovare una forma parametrica per r_1 e per r_2 .
3. (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
4. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di Q su r_1 e denotarla Q_1 .
5. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici Q , Q_1 e e_2 .
6. (1 punto) Siano $r_1 : Ax = b$ e $r_2 : Cx = d$ due rette di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la tabella delle posizioni reciproche di r_1 e r_2 .

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
3. (2 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. (1 punto) *Calcolare A^{-1} con il teorema di Cayley-Hamilton.*
5. (1 punto) *Calcolare A^{-1} con la formula di Cramer.*
6. (1 punto) *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{k})$ una matrice quadrata a coefficienti in un campo $\mathbf{k}$. Dare la definizione di autovettore per A di autovalore $\lambda \in \mathbf{k}$.*

Esercizio 4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che f è lineare.
2. (1 punto) Trovare la matrice A associata ad f nelle basi standard.
3. (1 punto) Trovare una base di $\ker(f)$.
4. (1 punto) Trovare una base di $\text{Im}(f)$.
5. (1 punto) Sia $\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
6. (1 punto) Calcolare la matrice C associata a f nella base standard in partenza e nella base $\mathcal{B}$ in arrivo.
7. (1 punto) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dare la definizione del nucleo e del rango di f . Se $\dim V = 20$, $\dim W = 14$ e $\text{rg}(f) = 7$ qual'è la dimensione del nucleo di f ?

Esercizio 5. Consideriamo il seguente piano di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. (2 punti) Calcolare una base ortogonale di U e denotarla $\mathcal{F}_U$.
2. (2 punti) Calcolare una base ortogonale di $U^\perp$ e denotarla $\mathcal{F}_{U^\perp}$.
3. (1 punto) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U .
4. (1 punto) Calcolare la distanza del vettore $v = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$ da U .
5. (1 punto) Enunciare il teorema di decomposizione ortogonale in $(\mathbf{R}^n, \cdot)$.