

Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Quarto appello aa: 2024/25
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Nome	
Cognome	
A.A. di immatricolazione (24/25, 23/24, 22/23 o prima?)	
E' la prima volta che si presenta a questo esame?	
Frequentante?	

14 luglio 2025

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. (2 punti) Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta r_{AB} passante per A e B .
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse s del segmento $\overline{AB}$.
3. (2 punti) Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ che ha il segmento AB come diametro.
4. (1 punto) Trovare il punto C ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta r_{AB} .
5. (1 punto) Scrivere A come combinazione convessa di O , C e B

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. (1 punto) Calcolare distanza tra P ed il piano $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$.
4. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca tra la retta $r = \langle v_1 - 2v_2 \rangle$ ed il piano π .
5. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta parallela ad r ed incidente al piano π .
6. (1 punto) Siano $w_1, w_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ quattro vettori tali che $w_1 \wedge w_2 = v_1$. Calcolare

$$[(2w_1 - 3w_2) \wedge (w_1 - w_2)] \wedge (v_1 + v_2).$$

7. (1 punto) Siano dati un piano $\sigma = Q + \langle w_1, w_2 \rangle$ ed una retta $s = P_0 + \langle v \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ entrambi in forma parametrica. Scrivere le formule per stabilire la loro posizione reciproca.

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare una base di $\text{Col}(A)$ ed il rango di A .
2. (1 punto) Calcolare una base del nucleo di A .
3. (1 punto) Calcolare la dimensione di $\text{Col}(A) \cap \text{Ker}(A)$ e di $\text{Col}(A) + \text{Ker}(A)$.
4. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
5. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
6. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
7. (1 punto) Enunciare la formula di Grassmann.

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. *Consideriamo le matrici*

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ k & k & k+1 & 2k \\ k & k & k+1 & 2k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$.

1. (2 punti) *Calcolare $\text{rref}(A(k))$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.*
2. (2 punti) *Calcolare una base di $\text{Ker}(A(k))$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.*
3. (1 punto) *Calcolare il rango ed una base di $\text{Col}(A(k))$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.*
4. (1 punto) *Studiare il sistema $A(k)X = b$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.*
5. (1 punto) *Dato un campo K , e due numeri interi $m, n \geq 1$, consideriamo una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ed una matrice $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(K)$. Quand'è che il sistema $AX = b$ è risolubile? Nel caso il sistema $AX = b$ sia risolubile, come è fatto l'insieme delle sue soluzioni?*

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. *Consideriamo la seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. (1 punto) *Dare la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. (1 punto) *Enunciare il teorema spettrale reale.*
3. (1 punto) *Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
4. (1 punto) *Trovare una base ortogonale di $\text{Ker}(A)$.*
5. (2 punti) *Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.*
6. (1 punto) *Calcolare $\sqrt{A}$ (ovvero una matrice il cui quadrato è A).*

Soluzione Esercizio 5.

