Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Quinto appello a.a. 2024/25
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

16 settembre 2025

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *avente come vertici i tre punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare il perimetro di* T*.*
2. *(1 punto) Calcolare le lunghezze dei tre angoli di* T*.*
3. *(2 punti) Trovare il circocentro* C *di* T*.*
4. *(2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *circoscritta a* T*.*
5. *(1 punto) Trovare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine prima attraverso l'asse* s_1 *del segmento* P_2P_3 *e poi attraverso l'asse* s_2 *del segmento* P_1P_2*.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

1. *(1 punto) Stabilire se i tre punti* P_1*,* P_2 *e* P_3 *sono allineati.*
2. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1*,* P_2 *e* P_3*.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta* r *passante per* P_1 *e* P_2*.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* P_3 *dalla retta* r*.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *contenente* P_1*,* P_2 *e* P_3*.*
6. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette:*

$$r_1 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

   senza cambiarne la forma.

7. *(1 punto) Scrivere la tabella delle posizioni reciproche di due rette* $r_1 : A_1X = b_1$ *e* $r_2 : A_2X = b_2$ *di* $\mathbb{R}^3$ *in forma cartesiana.*

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 8 & -3 & 4 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Determinare lo spettro di A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. *(1 punto) Calcolare A^n, per ogni $n \geq 1$.*
7. *(1 punto) Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 7x - 2y + 4z &= 0 \\ 8x - 3y + 4z &= 2 \\ -8x + 2y - 5z &= 1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. *Si consideri la funzione lineare "valutazione multipla"*

$$\mathrm{Val}_{0,1,2} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3 : \ p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare* $\mathrm{Val}_{0,1,2}(1 - 3x + 2x^2)$.
2. *(2 punti) Dimostrare che* $\mathrm{Val}_{0,1,2}$ *è un isomorfismo.*
3. *(1 punto) Trovare la matrice* $\mathrm{Van}(0,1,2)$ *associata a* $\mathrm{Val}_{0,1,2}$ *nelle basi standard.*
4. *(1 punto) Calcolare* $D(0,1,2) := \det(\mathrm{Van}(0,1,2))$.
5. *(1 punti) Calcolare il polinomio interpolatore dei tre punti* $(0,1)$, $(1,-1)$ *e* $(2,0)$.
6. *(1 punto) Se una matrice* A *di taglia* $m \times n$ *ha rango* m*, è vero che il sistema* $AX = b$ *è risolubile per ogni* b*? (Motivare la risposta.)*

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. *Consideriamo le matrici* $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f = 2$, $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array}\right)$, *il polinomio* $p(X) = X^t AX + 2b \cdot X + f$, *dove* $X = (x_1, x_2)^t$ *e la corrispondente conica* $\mathcal{C}_p : p(X) = 0$.

1. *(1punto) Calcolare* $p(X)$.
2. *(1 punto) Trovare il centro della conica, ovvero il vettore* C *tale che* $AC = -b$.
3. *(1 punto) Calcolare* $p(C) = \frac{\det(\hat{A})}{\det(A)}$.
4. *(1 punto) Calcolare lo spettro di* A.
5. *(2 punti) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t AB = D$.
6. *(1 punto) Trovare la forma canonica affine e metrica di* $\mathcal{C}_p$.

Soluzione Esercizio 5.