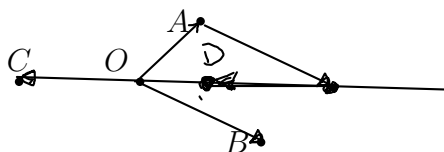


**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo il triangolo  $T$  di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

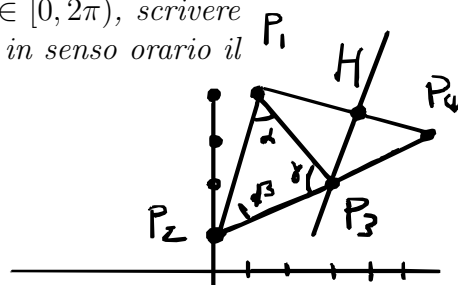
1. (1 punto) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo  $T$ .
2. (1 punto) Stabilire se  $T$  è acutangolo o ottusangolo.
3. (1 punto) Trovare il punto  $P_4$  tale che  $\overrightarrow{P_2 P_3} = \overrightarrow{P_3 P_4}$ .
4. (1 punto) Trovare il punto  $H$  di intersezione della retta passante per  $P_3$  e parallela alla retta passante per  $P_1$  e  $P_2$  con il segmento  $\overline{P_1 P_4}$ .
5. (1 punto) Dimostrare che  $H$  è il punto medio del segmento  $\overline{P_1 P_4}$ .
6. (1 punto) Consideriamo i seguenti punti  $O, A, B$  e  $C$ :



Trovare il punto  $D$  tale che  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

7. (1 punto) Dati due punti  $P, C \in \mathcal{E}^2$  ed un angolo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , scrivere la formula per trovare il punto  $Q$  ottenuto ruotando in senso orario il punto  $P$  attorno al punto  $C$  dell'angolo  $\theta$ .

Fare un disegno che illustri la situazione.



Sol: 1)  $A_T = \frac{1}{2} |\det(P_1 - P_2 | P_3 - P_2)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}| = 4$

$P_T = \|P_1 P_2\| + \|P_1 P_3\| + \|P_2 P_3\| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{10})$

2)  $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4 > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \text{ acuto}$

$\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot \overrightarrow{P_2 P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 3 = 6 > 0 \Rightarrow \cos \beta > 0 \Rightarrow \beta \text{ acuto}$

$\overrightarrow{P_3 P_1} \cdot \overrightarrow{P_3 P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow \cos \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \text{ acuto}$

3)  $P_3 - P_2 = P_4 - P_3 \Rightarrow P_4 = 2P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

4)  $P_3 + \langle P_1 - P_2 \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle: 3x - y = 7. \quad P_1 + \langle P_4 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle: x + 5y = 21$

$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 5y = 21 \end{cases} \quad x = \frac{\det \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 21 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{7}{16} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{7 \cdot 8}{16} = \frac{7}{2}. \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{7}{2}$

$H = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

5)  $\frac{P_1 + P_4}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = H. \quad 7) \quad Q = C - R_\theta(P - C), \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

**Esercizio 2.** In  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  consideriamo le due rette

$$r_1: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

ed il punto  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di  $r_1$  ed  $r_2$ , senza cambiare la loro forma.
- (2 punti) Trovare una forma parametrica per  $r_1$  e per  $r_2$ .
- (1 punto) Calcolare la distanza tra  $r_1$  ed  $r_2$ .
- (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $r_1$  e denotarla  $Q_1$ .
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo  $T$  di vertici  $Q$ ,  $Q_1$  e  $e_2$ .
- (1 punto) Siano  $r_1: Ax = b$  e  $r_2: Cx = d$  due rette di  $\mathbb{R}^3$ . Scrivere la tabella delle posizioni reciproche di  $r_1$  e  $r_2$ .

Sol:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -2 & | & 2 \\ 3 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -1 \\ 1 & 1 & -2 & | & 2 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -1 \\ 0 & 3 & -5 & | & 3 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 3 & -5 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 3 & -5 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset. \text{ K.a. } r_1 \cap \text{K.a. } r_2 = \{0\} = \emptyset \text{ sghembe.}$$

$$2) \text{ rref } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & | & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{rref } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$3) \text{ dist}(r_1, r_2) = \frac{|P_1 - P_2 \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4}{4 \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$4) \text{ pr}_{r_1}(Q) = P_1 + \text{pr}_{v_1}(Q - P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = Q_1$$

$$5) A_T = \frac{1}{2} \|Q - Q_1 \wedge Q_1 - Q_1\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{227}$$

|                                         |              |                               |                      |         |
|-----------------------------------------|--------------|-------------------------------|----------------------|---------|
| 6) $\text{rg}\left(\frac{A}{C}\right)$  | 2            | 2                             | 3                    | 3       |
| $\text{rg}\left(\frac{A b}{C d}\right)$ | 2            | 3                             | 3                    | 4       |
|                                         | $r \equiv s$ | $r \parallel s$<br>$r \neq s$ | $r \cap s = \{P_0\}$ | sghembe |

**Esercizio 3.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il determinante di  $A$ .
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .
3. (2 punti) Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .
4. (1 punto) Calcolare  $A^{-1}$  con il teorema di Cayley-Hamilton.
5. (1 punto) Calcolare  $A^{-1}$  con la formula di Cramer.
6. (1 punto) Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{k})$  una matrice quadrata a coefficienti in un campo  $\mathbf{k}$ . Dare la definizione di autovettore per  $A$  di autovalore  $\lambda \in \mathbf{k}$ .

Sol.: 1)  $\det A = \det \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 9 & -19 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = + \det \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$

2)  $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-4 & 10 & 19 \\ 1 & x-1 & -3 \\ -1 & 2 & x+4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-4 & 10 & 19 \\ 0 & x+1 & x+1 \\ -1 & 2 & x+4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-4 & 10 & 9 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -1 & 2 & x+2 \end{pmatrix}$   
 $= (x+1) \det \begin{pmatrix} x-4 & 9 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix} = (x+1) ((x-4)(x+2)-9) = (x+1)(x-1)^2$

3)  $S_P(A) = \{-1, 1\}$ .  $V_1(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 10 & 19 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim V_1(A) = 1 < 2 = n \Rightarrow A$  non è diagonalizzabile

4)  $P_A(x) = (x^2-1)(x-1) = x^3 - x^2 - x + 1$ .  $A^3 - A^2 - A + \mathbb{1}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 3}$

$A^{-1} = -(A^2 - A - \mathbb{1}_3) = - \left[ \begin{pmatrix} 7 & -12 & -30 \\ -2 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = - \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

5)  $A^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

6) È un vettore non-nullo  $X \in \mathbf{k}^n$  t.c.  $AX = \lambda X$ .

**Esercizio 4.** Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che  $f$  è lineare.
2. (1 punto) Trovare la matrice  $A$  associata ad  $f$  nelle basi standard.
3. (1 punto) Trovare una base di  $\ker(f)$ .
4. (1 punto) Trovare una base di  $\text{Im}(f)$ .
5. (1 punto) Sia  $\mathcal{B} = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Dimostrare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
6. (1 punto) Calcolare la matrice  $C$  associata a  $f$  nella base standard in partenza e nella base  $\mathcal{B}$  in arrivo.
7. (1 punto) Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Dare la definizione del nucleo e del rango di  $f$ . Se  $\dim V = 20$ ,  $\dim W = 14$  e  $\text{rg}(f) = 7$  qual'è la dimensione del nucleo di  $f$ ?

Sol.: 1) 2  $f = S_A$  dove  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3)  $\text{Ker } f = \text{Ker } A = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

4)  $\text{Im } f = \langle A^1, A^4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

5)  $\det(v_1 | v_2 | v_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ è base.}$

6)  $\begin{matrix} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & = & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow F_e & & \downarrow F_e & & \downarrow F_B \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 \end{matrix} \quad C = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 \\ -18 & -36 & -18 & -19 \\ 5 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

7)  $\text{Ker } f = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$ .  $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$ .  
 $\dim \text{Ker } f = \dim V - \text{rg } f = 20 - 7 = 13$ .

**Esercizio 5.** Consideriamo il seguente piano di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

- (2 punti) Calcolare una base ortogonale di  $U$  e denotarla  $\mathcal{F}_U$ .
- (2 punti) Calcolare una base ortogonale di  $U^\perp$  e denotarla  $\mathcal{F}_{U^\perp}$ .
- (1 punto) Calcolare la matrice  $P_U$  di proiezione ortogonale su  $U$ .

$$4. (1 \text{ punto}) \text{ Calcolare la distanza del vettore } v = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ da } U.$$

- (1 punto) Enunciare il teorema di decomposizione ortogonale in  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ .

Sol. 1)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_U = \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{G-S} \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

2)  $\mathcal{B}_{U^\perp} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{G-S} \mathcal{E}_{U^\perp} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

3)  $A = (F_1 | F_2) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ .  $P_U = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \left( 35 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 15 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2/3 \\ 5 & -4/3 \\ 0 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 21 & -7 & -7 & -14 \\ -7 & 7/3 & 7/3 & 14/3 \\ -7 & 7/3 & 91/3 & -28/3 \\ -14 & 14/3 & -28/3 & 49/3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1 & 1/3 & 13/3 & -4/3 \\ -2 & 2/3 & -4/3 & 7/3 \end{pmatrix}$

4)  $P_U v = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1 & 1/3 & 13/3 & -4/3 \\ -2 & 2/3 & -4/3 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ .  $v - P_U v = 10 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{dist}(v, U) = \|v - P_U v\| = 30\sqrt{2}$

5)  $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ .