

Esame scritto di Geometria  
Ingegneria chimica  
Quarto appello aa: 2024/25  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

|                                                            |  |
|------------------------------------------------------------|--|
| Nome                                                       |  |
| Cognome                                                    |  |
| A.A. di immatricolazione<br>(24/25, 23/24, 22/23 o prima?) |  |
| E' la prima volta che<br>si presenta a questo esame?       |  |
| Frequentante?                                              |  |

14 luglio 2025

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo i punti  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1. (2 punti) Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta  $r_{AB}$  passante per  $A$  e  $B$ .
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse  $s$  del segmento  $\overline{AB}$ .
3. (2 punti) Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della circonferenza  $\mathcal{C}$  che ha il segmento  $AB$  come diametro.
4. (1 punto) Trovare il punto  $C$  ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta  $r_{AB}$ .
5. (1 punto) Scrivere  $A$  come combinazione convessa di  $O$ ,  $C$  e  $B$

Fare un disegno che illustri la situazione.

**Soluzione Esercizio 1.**



**Esercizio 2.** In  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  consideriamo

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare  $v_1 \wedge v_2$ .
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano  $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ .
3. (1 punto) Calcolare distanza tra  $P$  ed il piano  $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$ .
4. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca tra la retta  $r = \langle v_1 - 2v_2 \rangle$  ed il piano  $\pi$ .
5. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta parallela ad  $r$  ed incidente al piano  $\pi$ .
6. (1 punto) Siano  $w_1, w_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  quattro vettori tali che  $w_1 \wedge w_2 = v_1$ . Calcolare

$$[(2w_1 - 3w_2) \wedge (w_1 - w_2)] \wedge (v_1 + v_2).$$

7. (1 punto) Siano dati un piano  $\sigma = Q + \langle w_1, w_2 \rangle$  ed una retta  $s = P_0 + \langle v \rangle$  di  $\mathbb{R}^3$  entrambi in forma parametrica. Scrivere le formule per stabilire la loro posizione reciproca.

**Soluzione Esercizio 2.**



**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare una base di  $\text{Col}(A)$  ed il rango di  $A$ .
2. (1 punto) Calcolare una base del nucleo di  $A$ .
3. (1 punto) Calcolare la dimensione di  $\text{Col}(A) \cap \text{Ker}(A)$  e di  $\text{Col}(A) + \text{Ker}(A)$ .
4. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .
5. (1 punto) Calcolare lo spettro di  $A$ .
6. (1 punto) Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .
7. (1 punto) Enunciare la formula di Grassmann.

**Soluzione Esercizio 3.**



**Esercizio 4.** Consideriamo le matrici

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ k & k & k+1 & 2k \\ k & k & k+1 & 2k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale  $k \in \mathbb{R}$ .

1. (2 punti) Calcolare  $\text{rref}(A(k))$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .
2. (2 punti) Calcolare una base di  $\text{Ker}(A(k))$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .
3. (1 punto) Calcolare il rango ed una base di  $\text{Col}(A(k))$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .
4. (1 punto) Studiare il sistema  $A(k)X = b$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .
5. (1 punto) Dato un campo  $K$ , e due numeri interi  $m, n \geq 1$ , consideriamo una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  ed una matrice  $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(K)$ . Quand'è che il sistema  $AX = b$  è risolubile? Nel caso il sistema  $AX = b$  sia risolubile, come è fatto l'insieme delle sue soluzioni?

**Soluzione Esercizio 4.**



**Esercizio 5.** *Consideriamo la seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. (1 punto) *Dare la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. (1 punto) *Enunciare il teorema spettrale reale.*
3. (1 punto) *Dimostrare che  $A$  è ortogonalmente diagonalizzabile.*
4. (1 punto) *Trovare una base ortogonale di  $\text{Ker}(A)$ .*
5. (2 punti) *Trovare una matrice ortogonale  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^t A B = D$ .*
6. (1 punto) *Calcolare  $\sqrt{A}$  (ovvero una matrice il cui quadrato è  $A$ ).*

**Soluzione Esercizio 5.**

