

Esame scritto di Geometria
Ingegneria chimica
Quinto appello a.a. 2024/25
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

15 settembre 2025

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo il triangolo T avente come vertici i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare il perimetro di T .
2. (1 punto) Calcolare le lunghezze dei tre angoli di T .
3. (2 punti) Trovare il circocentro C di T .
4. (2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza $\mathcal{C}$ circoscritta a T .
5. (1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine prima attraverso l'asse s_1 del segmento P_2P_3 e poi attraverso l'asse s_2 del segmento P_1P_2 .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

1. (1 punto) Stabilire se i tre punti P_1 , P_2 e P_3 sono allineati.
2. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
3. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per P_1 e P_2 .
4. (1 punto) Calcolare la distanza del punto P_3 dalla retta r .
5. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente P_1 , P_2 e P_3 .
6. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette:

$$r_1 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

senza cambiarne la forma.

7. (1 punto) Scrivere la tabella delle posizioni reciproche di due rette $r_1 : A_1 X = b_1$ e $r_2 : A_2 X = b_2$ di $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana.

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 8 & -3 & 4 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il determinante di A .
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
3. (1 punto) Determinare lo spettro di A .
4. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
5. (1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.
6. (1 punto) Calcolare A^n , per ogni $n \geq 1$.
7. (1 punto) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 7x - 2y + 4z &= 0 \\ 8x - 3y + 4z &= 2 \\ -8x + 2y - 5z &= 1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. Si consideri la funzione lineare “valutazione multipla”

$$\text{Val}_{0,1,2} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare $\text{Val}_{0,1,2}(1 - 3x + 2x^2)$.
2. (2 punti) Dimostrare che $\text{Val}_{0,1,2}$ è un isomorfismo.
3. (1 punto) Trovare la matrice $\text{Van}(0, 1, 2)$ associata a $\text{Val}_{0,1,2}$ nelle basi standard.
4. (1 punto) Calcolare $D(0, 1, 2) := \det(\text{Van}(0, 1, 2))$.
5. (1 punto) Calcolare il polinomio interpolatore dei tre punti $(0, 1)$, $(1, -1)$ e $(2, 0)$.
6. (1 punto) Se una matrice A di taglia $m \times n$ ha rango m , è vero che il sistema $AX = b$ è risolubile per ogni b ? (Motivare la risposta.)

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. Consideriamo le matrici $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f = 2$, $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array} \right)$ ed il polinomio in due variabili $p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + f$, dove $X = (x_1, x_2)^t$.

1. (1 punto) Trovare, se esiste, un vettore C tale che $AC = -b$.
2. (1 punto) Calcolare $p(C)$ e verificare che $p(C) = \frac{\det(\hat{A})}{\det(A)}$.
3. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
4. (2 punti) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.
5. (2 punti) Dimostrare che la forma bilineare $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ associata ad A è un prodotto scalare.
[Ricordiamo che, per definizione, $b_A(X, Y) = X^t A Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^2$]

Soluzione Esercizio 5.