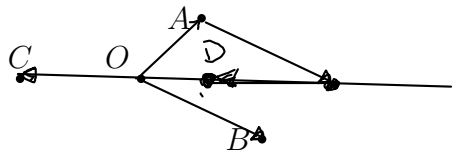
Esercizio 1. *In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo il triangolo T di vertici*

$$P_1 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

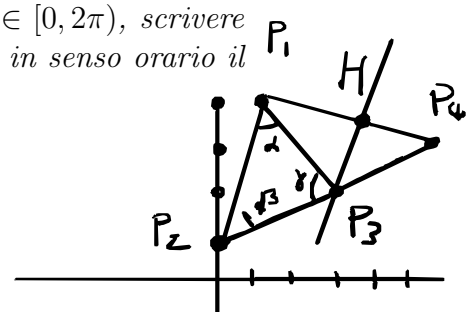
1. *(1 punto) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo T.*
2. *(1 punto) Stabilire se T è acutangolo o ottusangolo.*
3. *(1 punto) Trovare il punto P_4 tale che $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_3P_4}$.*
4. *(1 punto) Trovare il punto H di intersezione della retta passante per P_3 e parallela alla retta passante per P_1 e P_2 con il segmento $\overline{P_1P_4}$.*
5. *(1 punto) Dimostrare che H è il punto medio del segmento $\overline{P_1P_4}$.*
6. *(1 punto) Consideriamo i seguenti punti O, A, B e C:*



   Trovare il punto D tale che $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

7. *(1 punto) Dati due punti $P, C \in \mathcal{E}^2$ ed un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$, scrivere la formula per trovare il punto Q ottenuto ruotando in senso orario il punto P attorno al punto C dell'angolo θ.*

Fare un disegno che illustri la situazione.



Sol: 1) $A_T = \frac{1}{2}|\det(P_1-P_2 \mid P_3-P_2)| = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}| = 4$

$P_T = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| + \|\overrightarrow{P_1P_3}\| + \|\overrightarrow{P_2P_3}\| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10} = 2(\sqrt{2}+\sqrt{10})$

2) $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = -2+6 = 4 > 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ acuto

$\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3+3 = 6 > 0 \Rightarrow \cos\beta > 0 \Rightarrow \beta$ acuto

$\overrightarrow{P_3P_1} \cdot \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = 6-2 = 4 > 0 \Rightarrow \cos\gamma > 0 \Rightarrow \gamma$ acuto

} T acutangolo.

3) $P_3 - P_2 = P_4 - P_3 \Rightarrow P_4 = 2P_3 - P_2 = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

4) $P_3 + \langle P_1 - P_2 \rangle = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rangle : 3x - y = 7. \quad P_1 + \langle P_4 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} \rangle : x + 5y = 21$

$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 5y = 21 \end{cases} \quad x = \frac{\det\begin{pmatrix}7&-1\\21&5\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}3&-1\\1&5\end{pmatrix}} = \frac{7}{16}\det\begin{pmatrix}1&-1\\3&5\end{pmatrix} = \frac{7\cdot 8}{16} = \frac{7}{2}. \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix}3&7\\1&21\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}3&-1\\1&5\end{pmatrix}} = \frac{7}{2}$

$H = \begin{pmatrix}7/2\\7/2\end{pmatrix}$

5) $\frac{P_1+P_4}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} = H$. 7) $Q = C - R_\theta(P-C)$, $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo le due rette*

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 3x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \end{cases}$$

ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(2 punti) Trovare una forma parametrica per* r_1 *e per* r_2*.*
3. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
4. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* Q *su* r_1 *e denotarla* Q_1*.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* Q*,* Q_1 *e* e_2*.*
6. *(1 punto) Siano* $r_1 : Ax = b$ *e* $r_2 : Cx = d$ *due rette di* $\mathbb{R}^3$*. Scrivere la tabella delle posizioni reciproche di* r_1 *e* r_2*.*

Sol:

1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset$. $\ker r_1 \cap \ker r_2 = \{0\} = 0$ sghembe.

2) $\operatorname{rref}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow r_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_1} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1} \right\rangle$.

$\operatorname{rref}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_2} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\rangle$.

3) $\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \dfrac{|P_1 - P_2 \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{4}{4\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

4) $pr_{r_1}(Q) = P_1 + pr_{v_1}(Q - P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = Q_1$

5) $A_T = \dfrac{1}{2}\|Q - Q_1 \wedge Q_2 - Q_1\| = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{227}$

6)

$\operatorname{rg}\left(\frac{A}{C}\right)$	2	2	3	3
$\operatorname{rg}\left(\frac{A\,|\,b}{C\,|\,d}\right)$	2	3	3	4
	$r \equiv s$	$r \parallel s$, $r \neq s$	$r \cap s = \{P_0\}$	sghembe

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. *(1 punto) Calcolare A^{-1} con il teorema di Cayley-Hamilton.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{-1} con la formula di Cramer.*
6. *(1 punto) Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbf{k})$ una matrice quadrata a coefficienti in un campo $\mathbf{k}$. Dare la definizione di autovettore per A di autovalore $\lambda \in \mathbf{k}$.*

Sol: 1) $\det A = \det \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 9 & -19 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = + \det \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$

2) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-4 & 10 & 19 \\ 1 & x-1 & -3 \\ -1 & 2 & x+4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-4 & 10 & 19 \\ 0 & x+1 & x+1 \\ -1 & 2 & x+4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-4 & 10 & 9 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -1 & 2 & x+2 \end{pmatrix}$

$= (x+1) \det \begin{pmatrix} x-4 & 9 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix} = (x+1)\left((x-4)(x+2)-9\right) = (x+1)(x-1)^2$

3) $Sp(A) = \{-1, 1\}$. $V_1(A) = Ker \begin{pmatrix} -3 & 10 & 19 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow mg_A(1) = \dim V_1(A) = 1 < 2 = ma_A(1) \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile

4) $P_A(x) = (x^2-1)(x-1) = x^3 - x^2 - x + 1$. $A^3 - A^2 - A + \mathbb{1}_3 \overset{CH}{=} O_{3\times 3}$

$A^{-1} = -(A^2 - A - \mathbb{1}_3) = -\left[\begin{pmatrix} 7 & -12 & -30 \\ -2 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -10 & -19 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

5) $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

6) È un vettore non-nullo $X \in \mathbb{K}^n$ t.c. $AX = \lambda X$.

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *data da*

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
2. *(1 punto) Trovare la matrice* A *associata ad* f *nelle basi standard.*
3. *(1 punto) Trovare una base di* $\ker(f)$.
4. *(1 punto) Trovare una base di* $\mathrm{Im}(f)$.
5. *(1 punto) Sia* $\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. *Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
6. *(1 punto) Calcolare la matrice* C *associata a* f *nella base standard in partenza e nella base* $\mathcal{B}$ *in arrivo.*
7. *(1 punto) Sia* $f : V \to W$ *un'applicazione lineare. Dare la definizione del nucleo e del rango di* f. *Se* $\dim V = 20$, $\dim W = 14$ *e* $\mathrm{rg}(f) = 7$ *qual'è la dimensione del nucleo di* f*?*

Sol: 1) 2 $f = S_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\ker f = \ker A = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4) $\mathrm{Im} f = \langle A^1, A^4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$.

5) $\det(v_1 | v_2 | v_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ è base.

6) $\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & = & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow Fe & & \downarrow Fe & & \downarrow F_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 & \xleftarrow{B} & \mathbb{R}^3 \end{array}$ $\quad C = B^{-1}A = \underset{\text{Cramer}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 \\ -18 & -36 & -18 & -19 \\ 5 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

7) $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$. $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$.

$\dim \ker f = \dim V - \mathrm{rg} f = 20 - 7 = 13$.

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente piano di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. *(2 punti) Calcolare una base ortogonale di* U *e denotarla* $\mathcal{F}_U$*.*
2. *(2 punti) Calcolare una base ortogonale di* $U^\perp$ *e denotarla* $\mathcal{F}_{U^\perp}$*.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_U *di proiezione ortogonale su* U*.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza del vettore* $v = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$ *da* U*.*
5. *(1 punto) Enunciare il teorema di decomposizione ortogonale in* $(\mathbf{R}^n, \cdot)$*.*

Sol: 1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ F_1 F_2

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \overset{G-S}{\rightsquigarrow} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$

u_1 u_2 $u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ -20 \\ 35 \end{pmatrix}$

2) $\mathcal{B}_{U^\perp} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ v_1 v_2 $\overset{G-S}{\rightsquigarrow}$ $v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1/2 \\ 4/2 \end{pmatrix}$ $\mathcal{F}_{U^\perp} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

3) $A = (F_1 | F_2) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. $P_U = A (A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \left(35 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2/3 \\ 5 & -4/3 \\ 0 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 21 & -7 & -7 & -14 \\ -7 & 7/3 & 7/3 & 14/3 \\ -7 & 7/3 & 91/3 & -28/3 \\ -14 & 14/3 & -28/3 & 49/3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1 & 1/3 & 13/3 & -4/3 \\ -2 & 2/3 & -4/3 & 7/3 \end{pmatrix}$

4) $P_U v = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1 & 1/3 & 13/3 & -4/3 \\ -2 & 2/3 & -4/3 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. $v - P_U v = 10 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{dist}(v, U) = \| v - P_U v \| = 30\sqrt{2}$

5) $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.