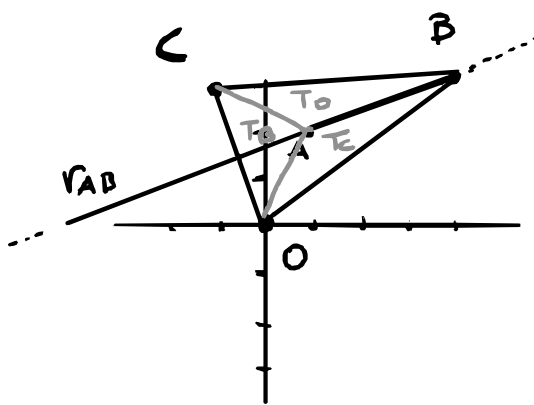


Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (2 punti) Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta r_{AB} passante per A e B .
- (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse s del segmento $\overline{AB}$.
- (2 punti) Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della circonferenza C che ha il segmento AB come diametro.
- (1 punto) Trovare il punto C ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta r_{AB} .
- (1 punto) Scrivere A come combinazione convessa di O , C e B .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.



$$1) r_{AB} = A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle : x - 3y = -5.$$

$$2) s: \overrightarrow{AB} \cdot x = \frac{B^2 - A^2}{2} \quad s: 3x + y = \frac{25 - 5}{2} = 10$$

$$3) \text{centro} = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{raggio} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{10}.$$

$$C: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$C = \left\{ \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{10}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \forall \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$4) r_{AB}: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}. \quad Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = Q_{\frac{1}{3}} \overrightarrow{AO} \Rightarrow C = A + Q_{\frac{1}{3}} (-A) = A - Q_{\frac{1}{3}} A = \left(\mathbb{I}_2 - Q_{\frac{1}{3}} \right) A.$$

$$Q_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9}-1 \end{pmatrix} = \frac{9}{10} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$5) A = \frac{1}{\text{Area}(T)} \left(\text{Area}_{T_0 O} + \text{Area}_{T_C C} + \text{Area}_{T_B B} \right).$$

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} |\det(C|B)| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{15}{2}$$

$$\text{Area}(T_0) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{2}$$

$$\text{Area}(T_C) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AO}|\overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{2}$$

$$\text{Area}(T_B) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AO}|\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3} (O + C + B)$
 A è il baricentro di T .

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. (1 punto) Calcolare distanza tra P ed il piano $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$.
4. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca tra la retta $r = \langle v_1 - 2v_2 \rangle$ ed il piano π .
5. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta parallela ad r ed incidente al piano π .
6. (1 punto) Siano $w_1, w_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ quattro vettori tali che $w_1 \wedge w_2 = v_1$. Calcolare

$$[(2w_1 - 3w_2) \wedge (w_1 - w_2)] \wedge (v_1 + v_2).$$

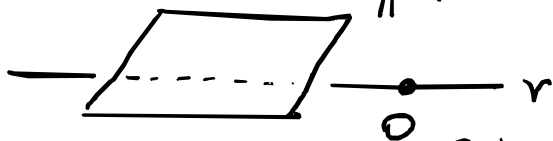
7. (1 punto) Siano dati un piano $\sigma = Q + \langle w_1, w_2 \rangle$ ed una retta $s = P_0 + \langle v \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ entrambi in forma parametrica. Scrivere le formule per stabilire la loro posizione reciproca.

Soluzione Esercizio 2.

$$1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad 2) \pi: v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P. \quad \boxed{\pi: -3x + 5y + 4z = 5}$$

$$3) \text{dist}(P, \pi_0) = \|P_{r_{v_1 \wedge v_2}}(P)\| = \frac{|P \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{5}{\sqrt{9+25+16}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4) r \subset \pi_0 \Rightarrow r \text{ e } \pi \text{ sono paralleli. } r \not\subset \pi \text{ perché } O \notin \pi.$$



$$5) \text{Tale retta è } P + r = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle : \begin{cases} 3x + 5y = 19 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$6) [(2w_1 - 3w_2) \wedge (w_1 - w_2)] \wedge (v_1 + v_2) = (-2w_1 \wedge w_2 - 3w_2 \wedge w_1) \wedge (v_1 + v_2) = \\ = (-2v_1 + 3v_1) \wedge (v_1 + v_2) = v_1 \wedge (v_1 + v_2) = v_1 \wedge v_2.$$

$$7)$$

	$\text{rg}(w_1 w_2 v)$	$\text{rg}(w_1 w_2 v P - Q)$
$s \subset \sigma$	2	2
$s \parallel \sigma, s \not\subset \sigma$	2	3
$s \cap \sigma = \{P_0\}$	3	3

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \text{ e } A$$

$A^2 = 2A$

1. (1 punto) Calcolare una base di $\text{Col}(A)$ ed il rango di A .
2. (1 punto) Calcolare una base del nucleo di A .
3. (1 punto) Calcolare la dimensione di $\text{Col}(A) \cap \text{Ker}(A)$ e di $\text{Col}(A) + \text{Ker}(A)$.
4. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
5. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
6. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
7. (1 punto) Enunciare la formula di Grassmann.

Soluzione Esercizio 3.

1) $\text{Col } A = \langle A^1, A^2 \rangle$. $B_{\text{Col } A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. $\text{rg } A = 2$.

2) $\text{Ker } A = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $B_{\text{Ker } A} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim(\text{Col } A + \text{Ker } A) = 3 \Rightarrow \dim(\text{Col } A \cap \text{Ker } A) = 1$

4) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \stackrel{\text{Grassmann}}{=} \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ -x & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$

$$= x \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ -x & -1 & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & -2 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= x^2 \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} = x^2 \det \begin{pmatrix} x & -x \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} = x^2 \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ -2 & x-3 \end{pmatrix} =$$

$$= x^3 (x-3)$$

5) $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$.

6) A non è diagonalizzabile perché

$$\operatorname{mg}_A(0) = \dim \operatorname{Ker} A = 2 < 3 = m_A(0)$$

7) Dati due sottospazi vettoriali $U, W \subset V$ di uno spazio vettoriale finitamente generato V ,
$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Esercizio 4. Consideriamo le matrici

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ k & k & k+1 & 2k \\ k & k & k+1 & 2k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$.

1. (2 punti) Calcolare $\text{rref}(A(k))$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
2. (2 punti) Calcolare una base di $\text{Ker}(A(k))$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. (1 punto) Calcolare il rango ed una base di $\text{Col}(A(k))$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
4. (1 punto) Studiare il sistema $A(k)X = b$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
5. (1 punto) Dato un campo K , e due numeri interi $m, n \geq 1$, consideriamo una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ed una matrice $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(K)$. Quand'è che il sistema $AX = b$ è risolubile? Nel caso il sistema $AX = b$ sia risolubile, come è fatto l'insieme delle sue soluzioni?

Soluzione Esercizio 4.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ k & k & k+1 & 2k \\ k & k & k+1 & 2k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ k & k & k+1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ 0 & k(1-k) & k+1-k^2 & k(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $k(1-k) \neq 0$ allora

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1+k \\ 0 & 1 & \frac{k+1-k^2}{k(1-k)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k-1} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{k^2-k-1}{k(k-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rref}(A(k))$$

$$\text{Se } k=0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rref}(A(0)).$$

$$\text{Se } k=1, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rref}(A(1)).$$

$$2) \text{ Se } k(k-1) \neq 0, \text{ Ker}(A(k)) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k-1} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{k^2-k-1}{k(k-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\text{Ker}(A(k))} = \left(\begin{pmatrix} -k \\ -k^2+k+1 \\ k(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Se } k=0, \quad \text{Ker}(A(0)) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{\text{Ker} A(0)} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Se } k=1, \quad \text{Ker}(A(1)) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{\text{Ker} A(1)} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$3) \text{rg } A(k) = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$\beta_{\text{Col } A(k)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \\ k \end{pmatrix} \right) [\text{Se } k(k+1) \neq 0]. \quad \beta_{\text{Col } A(1)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\beta_{\text{Col } A(0)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$4) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & k & 1+k & 2 \\ k & k & k+1 & 2k & 3 \\ k & k & k+1 & 2k & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & k & 1+k & 2 \\ k & k & k+1 & 2k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & k & 1+k & 2 \\ 0 & k(1-k) & k+1-k^2 & k(1-k) & 3-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Se } k=0, \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Ker } A(0). \quad \text{Se } k=1,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Ker } A(1).$$

$$\text{Se } k(k-1) \neq 0,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & k & 1+k & 2 \\ 0 & k(1-k) & k+1-k^2 & k(1-k) & 3-2k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & k & 1+k & 2 \\ 0 & 1 & \frac{k+1-k^2}{k(1-k)} & 1 & \frac{3-2k}{k(1-k)} \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{k-1} & 1 & \frac{1}{k-1} \\ 0 & 1 & \frac{k+1-k^2}{k(1-k)} & 1 & \frac{3-2k}{k(1-k)} \end{array} \right). \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{k-1} \\ \frac{3-2k}{k(1-k)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Ker } A(k)$$

5) $AX=b$ risolvibile $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg}(A|b)$. In questo caso l'insieme S delle soluzioni è $X_0 + \text{Ker } A$, dove X_0 è una soluzione.

Esercizio 5. Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. (1 punto) Dare la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.
2. (1 punto) Enunciare il teorema spettrale reale.
3. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
4. (1 punto) Trovare una base ortogonale di $\text{Ker}(A)$.
5. (2 punti) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.
6. (1 punto) Calcolare $\sqrt{A}$ (ovvero una matrice il cui quadrato è A).

Soluzione Esercizio 5.

1) Una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n)$ composta di suoi autovettori.

2) A è ort. diag. $\Leftrightarrow A = A^t$

3) $A = A^t$ quindi è ort. diag. per il Teorema spettrale.

4) $\text{Ker } A = \text{Ker } (1 \ 1 \ 1 \ 1) = \langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$

$$F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{F_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 - \frac{v_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{F_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(F_1, F_2, F_3) è una base ortogonale di $\text{Ker } A$.

5) $\text{Tr } A = 4 \Rightarrow \text{Sp}(A) = \{4, 0\}$. $V_4(A) = (\text{Ker } A)^\perp = \text{Col } A^t = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 0 & 0 & 3/\sqrt{12} \end{pmatrix} \quad D = \text{diag}(4, 0, 0, 0)$$

6) $\sqrt{A} = B \text{diag}(2, 0, 0, 0) B^t$ oppure $\sqrt{A} = B \text{diag}(-2, 0, 0, 0) B^t.$