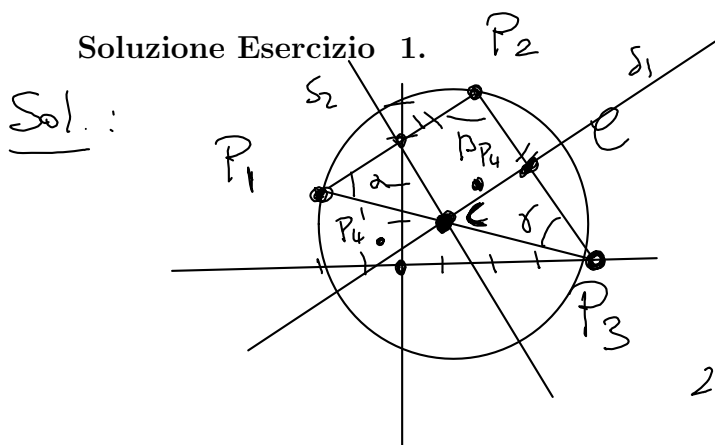


Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo il triangolo T avente come vertici i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare il perimetro di T .
2. (1 punto) Calcolare le lunghezze dei tre angoli di T .
3. (2 punti) Trovare il circocentro C di T .
4. (2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza C circoscritta a T .
5. (1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine prima attraverso l'asse S_1 del segmento P_2P_3 e poi attraverso l'asse S_2 del segmento P_1P_2 .

Fare un disegno che illustri la situazione.



$$1) \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{P_1P_2}\| = 2\sqrt{5}, \quad \|\vec{P_1P_3}\| = 2\sqrt{10}, \quad \|\vec{P_2P_3}\| = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Perimetro} = 2\sqrt{5}(2 + \sqrt{2}). \text{ Isoscele.}$$

$$2) \vec{P_2P_1} \cdot \vec{P_2P_3} = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}. \quad \alpha = \gamma = \frac{\pi}{4}$$

$$3) C = \frac{P_1 + P_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \begin{cases} \vec{P_1P_2} \cdot X = \frac{P_2^2 - P_1^2}{2} \\ \vec{P_2P_3} \cdot X = \frac{P_3^2 - P_2^2}{2} \end{cases} : \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -5. \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5. \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -5$$

$$4) \text{raggio} = \frac{\|\vec{P_1P_3}\|}{2} = \sqrt{10}. \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{10} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\} : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$5) S_1 : x - 2y = -1 \quad S_2 : 2x + y = 3. \quad m_1 = \frac{1}{2} \quad m_2 = -2$$

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}. \quad P_4' = C + Q_{m_2}(-C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q_{m_1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \quad Q_{m_2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$P_4 = C + Q_{m_2}(P_4' - C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- (1 punto) Stabilire se i tre punti P_1 , P_2 e P_3 sono allineati.
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
- (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per P_1 e P_2 .
- (1 punto) Calcolare la distanza del punto P_3 dalla retta r .
- (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente P_1 , P_2 e P_3 .
- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette:

$$r_1: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

senza cambiarne la forma.

- (1 punto) Scrivere la tabella delle posizioni reciproche di due rette $r_1: A_1X = b_1$ e $r_2: A_2X = b_2$ di $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana.

Soluzione Esercizio 2.

Sol.: 1) $\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}) = \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

non sono allineati.

2) $\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Area $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \|\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6}$

3) $r = P_1 + \langle \vec{P_1P_2} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle : \begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 3z = -1 \end{cases}$

4) $\text{pr}_{\vec{P_1P_2}}(\vec{P_1P_3}) = \frac{\vec{P_1P_3} \cdot \vec{P_1P_2}}{\vec{P_1P_2} \cdot \vec{P_1P_2}} \vec{P_1P_2} = \frac{12}{14} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{P_1P_3} - \text{pr}_{\vec{P_1P_2}} \vec{P_1P_3} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\text{dist}(P_3, r) = \frac{2}{7} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{7} \sqrt{21}$.

5) $\pi = P_1 + \langle \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \rangle : \vec{P} \wedge \vec{P_1P_2} \cdot X = \vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3} \cdot P_1$

6) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

	$\text{rg} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$	$\text{rg} \begin{pmatrix} A_1 b_1 \\ A_2 b_2 \end{pmatrix}$
$r_1 \equiv r_2$	2	2
$r_1 \parallel r_2$	2	3
$r_1 \cap r_2 = \{P\}$	3	3
Skewbe	3	4

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 8 & -3 & 4 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il determinante di A .
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
3. (1 punto) Determinare lo spettro di A .
4. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
5. (1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.
6. (1 punto) Calcolare A^n , per ogni $n \geq 1$.
7. (1 punto) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 7x - 2y + 4z = 0 \\ 8x - 3y + 4z = 2 \\ -8x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 3.

Sol. 1) $\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$

2) $p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A) = x^3 - \text{Tr}A x^2 + \frac{1}{2}((\text{Tr}A)^2 - \text{Tr}(A^2))x - \det A =$
 $= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}(1 - (1+1+1))x - 1 = x^3 + x^2 - x - 1$
 $= (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1).$

3) $\text{Sp}(A) = \{1, -1\}.$

4) $V_{-1}(A) = \text{Ker}(-\mathbb{1}_3 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle. V_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5) $A^3 + A^2 - A - \mathbb{1}_3 \stackrel{CH}{=} 0_3 \Rightarrow A^{-1} = A^2 + A - \mathbb{1}_3. \quad A^2 = \mathbb{1}_3 \Rightarrow A^{-1} = A$

6) $A^n = \begin{cases} A & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \mathbb{1}_3 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$

7) L'unica soluzione è $A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Esercizio 4. Si consideri la funzione lineare "valutazione multipla"

$$\text{Val}_{0,1,2} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare $\text{Val}_{0,1,2}(1 - 3x + 2x^2)$.
2. (2 punti) Dimostrare che $\text{Val}_{0,1,2}$ è un isomorfismo.
3. (1 punto) Trovare la matrice $\text{Van}(0, 1, 2)$ associata a $\text{Val}_{0,1,2}$ nelle basi standard.
4. (1 punto) Calcolare $D(0, 1, 2) := \det(\text{Van}(0, 1, 2))$.
5. (1 punto) Calcolare il polinomio interpolatore dei tre punti $(0, 1)$, $(1, -1)$ e $(2, 0)$.
6. (1 punto) Se una matrice A di taglia $m \times n$ ha rango m , è vero che il sistema $AX = b$ è risolubile per ogni b ? (Motivare la risposta.)

Soluzione Esercizio 4.

Trovare fnd.
algebra.

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\text{Ker Val}_{0,1,2} = \{ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(0) = p(1) = p(2) = 0 \} = \{ 0 \}_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}$

$\Rightarrow \text{Val}_{0,1,2}$ è iniettiva. $\dim \text{Im Val}_{0,1,2} = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} - \dim \text{Ker Val}_{0,1,2} = 3$
 $\Rightarrow \text{Val}_{0,1,2}$ è suriettiva.

3) $\text{Van}(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $D(0, 1, 2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

5) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dove $\text{Van}(0, 1, 2) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \text{Van}(0, 1, 2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcoliamo $\text{Van}(0, 1, 2)^{-1}$ con

Cramer: $\text{Van}(0, 1, 2)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}x^2$

6) Sì! $S_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ è suriettiva se e solo se $\text{rg } A = m$.

Esercizio 5. Consideriamo le matrici $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f = 2$, $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array} \right)$, il polinomio $p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + f$, dove $X = (x_1, x_2)^t$ e la corrispondente conica $C_p : p(X) = 0$.

1. (1 punto) Calcolare $p(X)$.
2. (1 punto) Trovare il centro della conica, ovvero il vettore C tale che $AC = -b$.
3. (1 punto) Calcolare $p(C) = \frac{\det(\hat{A})}{\det(A)}$.
4. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
5. (2 punti) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.
6. (1 punto) Trovare la forma canonica affine e metrica di C_p .

Soluzione Esercizio 5.

$$1) \quad p(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 2$$

$$2) \quad A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}. \quad C = -A^{-1}b = -\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{50} \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$3) \quad \det \hat{A} = \det \begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & -25 & -10 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ = -2 \det \begin{pmatrix} -25 & -10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 50 = \det A \Rightarrow p(C) = 1$$

$$4) \quad p_A(x) = x^2 - \text{Tr} A x + \det A = x^2 - 15x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 5$$

$$S_P(A) = \{10, 5\}.$$

$$5) \quad V_{10}(A) = \text{Ker} (10 \mathbb{1}_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \text{Ker} (1 \ -2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$V_5(A) = V_{10}(A)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{matrix} \uparrow \\ A = A^t \end{matrix} \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6) \quad 10x^2 + 5y^2 = -1 \quad \text{forma canonica metrica}$$

$$x^2 + y^2 = -1 \quad \text{forma canonica affine}$$

ELLISSE
IMMAGINARIA