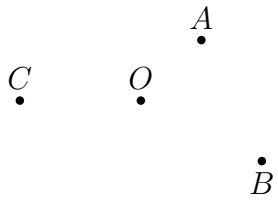
Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Secondo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2026

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i vettori* $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *ed il punto* $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Consideriamo anche le due rette* $r_1 = P + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P + \langle v_2 \rangle$.

1. *(1 punto) Calcolare* $\cos \widehat{v_1 v_2}$.
2. *(1 punto) Calcolare* $F_{\mathcal{B}}(P)$.
3. *(1 punto) Calcolare* $P_1 = \mathrm{pr}_{v_1}^{v_2}(\overrightarrow{OP})$ *e* $P_2 = \mathrm{pr}_{v_2}^{v_1}(\overrightarrow{OP})$.
4. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana della retta* r_1.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *passante per* P *e per le punte di* v_1 *e di* v_2.
6. *(1 punto) Calcolare il punto* Q *ottenuto ruotando il punto* P *attorno all'origine di un angolo di* $60°$ *in senso orario.*
7. *(1 punto) Consideriamo i seguenti punti* O, A, B *e* C *di* $\mathcal{E}^2$*:*



Disegnare le due rette $r = r_{OA}$ *e* $s = r_{OC}$ *ed i due punti* D *ed* E *tali che* $\overrightarrow{OD} = \mathrm{pr}_r^s(\overrightarrow{OB})$ *e* $\overrightarrow{OE} = \mathrm{pr}_s^r(\overrightarrow{OB})$.

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette*

$$r : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - z &= -1 \\ x + 2y + z &= -2 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare un vettore direttore v di r e w di s.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r e di s.*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano π passante per s e parallelo ad r.*
5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r e π.*
6. *(1 punto) Dimostrare la seguente formula: data una retta $r = P_0 + \langle v \rangle$ ed un punto $P \in \mathbb{R}^3$, allora*

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{\|(P - P_0) \wedge v\|}{\|v\|}$$

7. *(1 punto) Usare la formula precedente per trovare l'equazione del cilindro H di asse r e tangente a π.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
4. *(1 punto) Trovare una base dell' autospazio di autovalore* 1.
5. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
6. *(1 punto) Sia $n \geq 2$ un intero e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Che cosa vuol dire che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?*
7. *(1 punto) E' vero che ogni matrice reale è diagonalizzabile sui reali? E sui complessi? (Se è vero dimostrarlo,altrimenti fornire un controesempio.)*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}_2 = \left(w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_1$ è un base di $\mathbb{R}^2$ e che $\mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3$ e $f(v_2) = w_1 + w_3$. Calcolare la matrice F associata a f nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.*
3. *(1 punto) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita come segue:*

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (-4x - 3y + 2z)v_1 + (3x + 2y - 2z)v_2$$

   Dimostrare che g è lineare.

4. *(1 punto) Calcolare la matrice G associata a g nelle basi standard $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$.*
5. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata a $g \circ f$ nella base standard $\mathcal{C}_2$.*
6. *(1 punto) Stabilire se $g \circ f$ è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa; altrimenti trovare una base per il suo nucleo e per la sua immagine.*
7. *(1 punto) Calcolare l'inversa della matrice $B_2 = (w_1|w_2|w_3)$.*

Esercizio 5. *In* $\mathbb{R}^4$*, consideriamo:*

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_U$ *di* U*.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice* P_U *di proiezione ortogonale su* U*.*
3. *(1 punto) Calcolare la distanza di* P *da* U*.*
4. *(2 punti) Calcolare la dimensione di* $U \cap W$ *e la dimensione di* $U + W$*.*
5. *(1 punto) Trovare una base ortogonale di* $U + W$ *e calcolare la proiezione ortogonale di* Q *su* $U + W$ *utilizzando i coefficienti di Fourier.*