

Esame scritto di Geometria.
Terzo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

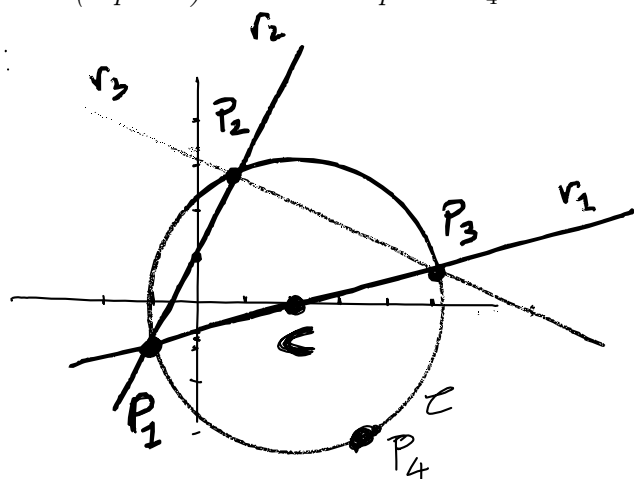
16 giugno 2026

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo le rette

$$r_1: x - 3y = 2, \quad r_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right), \quad r_3: x + 2y = 7.$$

- (1 punto) Calcolare i punti $P_1 = r_1 \cap r_2$, $P_2 = r_2 \cap r_3$ e $P_3 = r_1 \cap r_3$ senza cambiare la loro forma.
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo $T = P_1 P_2 P_3$.
- (2 punti) Calcolare equazioni cartesiane dei tre assi del triangolo T .
- (1 punto) Calcolare il circocentro C del triangolo T .
- (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza circoscritta a T .
- (1 punto) Calcolare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_2 attraverso r_1 .

Sol.:



1) $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \quad \boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}$ Infatti,

$$r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix} \mid \forall t \in \mathbb{R} \right\}. \quad \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix} \in r_1 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix} \in r_3 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{d=1} \\ \text{numer} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = 5 \\ y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = 1 \end{matrix}$$

2) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} |\det(P_2 - P_1, P_3 - P_1)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}| = 2 |\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}| = 10$

3) Anz $\overline{AB}$: $\overline{AB} \cdot X = \frac{\overline{B}^2 - \overline{A}^2}{2}$. Nel nostro caso,

$$\overline{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{P_2 P_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_1^2 = 2, \quad P_2^2 = 10, \quad P_3^2 = 26.$$

Anz $\overline{P_1 P_2}$: $\boxed{x+2y=2}$. Anz $\overline{P_1 P_3}$: $\boxed{3x+y=6}$. Anz $\overline{P_2 P_3}$: $\boxed{2x-y=4}$.

4) C : $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-y=4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

5) raggio $r = \|C - P_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}$. $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{10} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \forall \theta \in [0, 2\pi) \right\} : (x-2)^2 + y^2 = 10$.

6) $Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. r_1 ha pendenza $m = \frac{1}{3}$.

$$P_4 = P_1 + Q_{\frac{1}{3}}(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{10} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il piano e le due rette

$$\pi: x - y + z = 1, \quad r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.
- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di π ed r senza cambiare la loro forma.
- (1 punto) Trovare i punti $P_1 = \pi \cap r$, $P_2 = \pi \cap s$ e $P_3 = r \cap s$.
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo $P = P_1 P_2 P_3$.
- (1 punto) Calcolare il perimetro del triangolo $P = P_1 P_2 P_3$.
- (1 punto) Sia $v_1 = \overrightarrow{P_3 P_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_3 P_2}$. Calcolare $v = v_1 \wedge v_2$ e considerare la retta $t = P_3 + \langle v \rangle$. Calcolare il punto $P_4 = t \cap \pi$.
- (1 punto) Ricordando che il volume di un tetraedro è dato dalla terza parte dell'area di una faccia per la sua altezza, calcolare il volume del tetraedro $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Sol.: 1) r ed s si intersecano in un punto. Infatti,

$$\begin{cases} (1+t) - (-6+4t) = 1 \\ -4+3t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-3t = 1 \\ 3t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2. \quad r \cap s = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) π ed r si intersecano in un punto. Infatti,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \pi \cap r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3) $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$. Infatti, P_1 e P_3 li abbiamo già calcolati e P_2 lo calcoliamo come segue

$$(1+t) - (-4+3t) + (-6+4t) = 1 \Leftrightarrow 2t = 2 \Leftrightarrow t = 1.$$

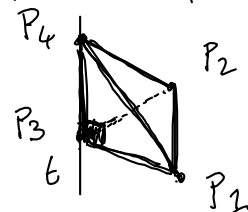
$$4) \text{Area}(\tau) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_1 P_2} \wedge \overrightarrow{P_1 P_3}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

$$5) \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2}, \quad \|\overrightarrow{P_1 P_3}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}, \quad \|\overrightarrow{P_2 P_3}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{26} \Rightarrow \text{Perimetro} = 4\sqrt{2} + \sqrt{26}$$

$$6) v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle. \quad P_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7) Il Tetraedro è rettangolo in P_3 poiché $t \perp P_1 P_2 P_3$.

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area}(\tau) \|\overrightarrow{P_3 P_4}\| = \frac{1}{3} \frac{3}{2} \sqrt{3} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 3$$



Esercizio 3. Si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = vw^t$.

1. (1 punto) Calcolare la matrice A .
2. (1 punto) Calcolare una base di $\text{Col}(A)$.
3. (1 punto) Calcolare una base del nucleo di A .
4. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
5. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
6. (1 punto) Dimostrare la seguente formula, nota come formula di Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

7. (1 punto) Per $n \geq 2$, siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ due vettori non-nulli e tali che $v \cdot w = 0$. Dimostrare che la matrice $A = vw^t$ non è diagonalizzabile.

Sol.: 1) $A = (v|v|-v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ 2) $B_{\text{Col} A} = (v)$,

3) $\text{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid vw^t x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid w \cdot x = 0\} = w^\perp$; $x+y-z=0$. $B_{\text{Ker} A} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 2 \\ -3 & -3 & x+3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ -x & x-2 & 2 \\ 0 & -3 & x+3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 0 & x-3 & 3 \\ 0 & -3 & x+3 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x-3 & 3 \\ -3 & x+3 \end{pmatrix}$
 $= x \det \begin{pmatrix} x & 3 \\ x & x+3 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x^3$. $P_A(x) = x^3$

5) $\text{Sp}(A) = \{0\}$. $m_A(0) = 3$. $m_{\mathcal{A}}(0) = \dim \text{Ker} A = 2 < m_{\mathcal{A}}(0)$

$\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

6) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Loptice
1° riga

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

7) $\text{Sp}(A) = \{0\}$. $V_A(0) = \text{Ker} A = w^\perp$, $\dim \text{Ker} A = m_{\mathcal{A}}(0) \underset{w \neq 0}{=} n-1 < m_{\mathcal{A}}(0)$
 $v \in w^\perp \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi vettoriali $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$.

1. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane di U .
2. (1 punto) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
3. (2 punti) Calcolare la matrice A associata a pr_U^W nella base standard di $\mathbb{R}^4$.
4. (1 punto) Calcolare $\text{pr}_U^W(P)$.
5. (1 punto) Calcolare la matrice A' associata a pr_W^U nella base standard di $\mathbb{R}^4$.
6. (1 punto) Dimostrare che $AA' = A'A = 0_{4 \times 4}$ è la matrice nulla.

Sol.: 1) $\text{Ka} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ka} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$U: \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2) $w_1 \notin U$ e $w_2 \notin U$, quindi $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Dalla formula di Grassmann
 $\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 4$ e quindi $U + W = \mathbb{R}^4$.

3) $B = (u_1, u_2, w_1, w_2)$ è una base di $\mathbb{R}^4$. La matrice associata a pr_U^W in B è $C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{pr}_U^W} \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$

$$A = BCB^{-1}, \text{ dove}$$

$$\mathbb{R}^4 \xleftarrow{B} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{pr}_U^W} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^4$$

$B = (u_1 | u_2 | w_1 | w_2)$. Calcoliamo B^{-1} con l'algoritmo di inversione e otteniamo

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 10 & 3 & -5 \\ 1 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 & 0 \\ -3 & 13 & 4 & -5 \\ 9 & -36 & -11 & 15 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) \text{pr}_U^W(P) = AP = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = u_1 + u_2$$

$$5) A' = \mathbb{1}_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -12 & -4 & -15 \\ -9 & 36 & 12 & -15 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6) \text{pr}_U^W \circ \text{pr}_W^U = 0_{\mathbb{R}^4} = \text{pr}_W^U \circ \text{pr}_U^W$$

Esercizio 5. Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
3. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
4. (2 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonali tali che $B^t A B = D$.
5. (1 punto) Calcolare A^{-1} .
6. (1 punto) Sia $n \geq 2$ e siano A e B due matrici simmetriche $n \times n$ tali che $AB = BA$. Dimostrare che la matrice AB è ortogonalmente diagonalizzabile.

1) Poiché $A = A^t$, per il teorema spettrale A è ortogonalmente diagonalizzabile.

$$2) P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)^3(x+2)$$

$$3) Sp(A) = \{-2, 2\}.$$

$$4) V_2(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} (1 \ -1 \ 1 \ -1) = \langle b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\bar{F}_1 = b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{E}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}_2' = b_3 - \frac{b_3 \cdot \bar{F}_1}{\bar{F}_1 \cdot \bar{F}_1} \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{E}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}_3' = b_4 - \frac{b_4 \cdot \bar{F}_1}{\bar{F}_1 \cdot \bar{F}_1} \bar{F}_1 - \frac{b_4 \cdot \bar{F}_2}{\bar{F}_2 \cdot \bar{F}_2} \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{E}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

$$V_{-2}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow \bar{E}_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = (\bar{E}_1 | \bar{E}_2 | \bar{E}_3 | \bar{E}_4) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(2, 2, 2, -2).$$

$$5) D^2 = 4 \mathbb{I}_4 \Rightarrow A^2 = (B D B^t)^2 = B D^2 B^t = 4 \mathbb{I}_4 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} A$$

$$6) (AB)^t = B^t A^t = BA = AB \Rightarrow AB \text{ è n.r. diag. per il Teo spettrale.}$$