

Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Terzo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

16 giugno 2026

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo le rette

$$r_1 : x - 3y = 2, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad r_3 : x + 2y = 7.$$

1. (1 punto) Calcolare i punti $P_1 = r_1 \cap r_2$, $P_2 = r_2 \cap r_3$ e $P_3 = r_1 \cap r_3$ senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo $T = P_1P_2P_3$.
3. (2 punti) Calcolare equazioni cartesiane dei tre assi del triangolo T .
4. (1 punto) Calcolare il circocentro C del triangolo T .
5. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza circoscritta a T .
6. (1 punto) Calcolare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_2 attraverso r_1 .

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il piano e le due rette

$$\pi : x - y + z = 1, \quad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di π ed r senza cambiare la loro forma.
3. (1 punto) Trovare i punti $P_1 = \pi \cap r$, $P_2 = \pi \cap s$ e $P_3 = r \cap s$.
4. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo $P = P_1P_2P_3$.
5. (1 punto) Calcolare il perimetro del triangolo $P = P_1P_2P_3$.
6. (1 punto) Sia $v_1 = \overrightarrow{P_3P_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_3P_2}$. Calcolare $v = v_1 \wedge v_2$ e considerare la retta $t = P_3 + \langle v \rangle$. Calcolare il punto $P_4 = t \cap \pi$.
7. (1 punto) Ricordando che il volume di un tetraedro è dato dalla terza parte dell'area di una faccia per la sua altezza, calcolare il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$.

Esercizio 3. Si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = vw^t$.

1. (1 punto) Calcolare la matrice A .
2. (1 punto) Calcolare una base di $\text{Col}(A)$.
3. (1 punto) Calcolare una base del nucleo di A .
4. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
5. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
6. (1 punto) Dimostrare la seguente formula, nota come formula di Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

7. (1 punto) Per $n \geq 2$, siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ due vettori non-nulli e tali che $v \cdot w = 0$. Dimostrare che la matrice $A = vw^t$ non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi vettoriali $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$.

1. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane di U .
2. (1 punto) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
3. (2 punti) Calcolare la matrice A associata a pr_U^W nella base standard di $\mathbb{R}^4$.
4. (1 punto) Calcolare $\text{pr}_U^W(P)$.
5. (1 punto) Calcolare la matrice A' associata a pr_W^U nella base standard di $\mathbb{R}^4$.
6. (1 punto) Dimostrare che $AA' = A'A = 0_{4 \times 4}$ è la matrice nulla.

Esercizio 5. Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
3. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
4. (2 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonali tali che $B^t A B = D$.
5. (1 punto) Calcolare A^{-1} .
6. (1 punto) Sia $n \geq 2$ e siano A e B due matrici simmetriche $n \times n$ tali che $AB = BA$. Dimostrare che la matrice AB è ortogonalmente diagonalizzabile.