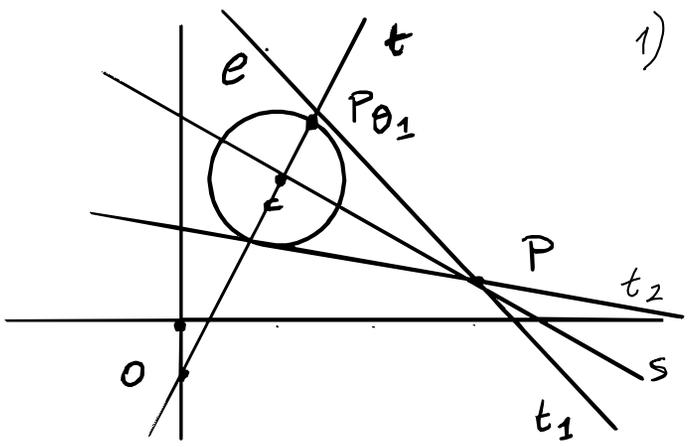
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *ed il numero* $r = \sqrt{2}$.

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* C *e raggio* r.
2. *(1 punto) Trovare l'equazione cartesiana della retta* t *passante per* C *ed ortogonale al segmento* CP.
3. *(1 punto) Dare una parametrizzazione della retta* s *passante per* P *e* C *tale che* C *si trovi al tempo* 0 *e* P *al tempo* 1.
4. *(1 punto) Sia* $P_{\theta_1} \in \mathcal{C} \cap t$. *Utilizzare la parametrizzazione del punto precedente per trovare un valore* t_0 *del parametro tale che* $t_0 > 0$ *ed il corrispondente punto* $P_{t_0} \in s$ *formi un triangolo* $CP_{\theta_1}P_{t_0}$ *di area uguale a* 10.
5. *(1 punto) Trovare le equazioni cartesiane delle due rette* t_1 *e* t_2 *passanti per* P *e tangenti a* $\mathcal{C}$.
6. *(1 punto) Scrivere la matrice di riflessione ortogonale* Q_m *attraverso la retta* $y = mx$.
7. *(1 punto) Calcolare il punto* R *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta* s *passante per* P *e* C.



1) $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \forall \theta \in [0, 2\pi] \right\}$: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$

2) $t : \overrightarrow{CP} \cdot X = \overrightarrow{CP} \cdot C$. $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$t : 4x - 2y = 2$. $t : 2x - y = 1$

3) $s = C + \langle \overrightarrow{CP} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$.

4) $P_t = C + t\,\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 2+4t \\ 3-2t \end{pmatrix}$.

$\text{Area}(P_t C P_{\theta_1}) = \frac{1}{2} r \|\overrightarrow{CP_t}\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}|t| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = |t|\sqrt{10}$.

$|t|\sqrt{10} = 10 \iff t = \pm\sqrt{10}$. $\boxed{t_0 = \sqrt{10}}$.

5) La retta $x = 6$ non interseca $\mathcal{C}$. Le altre rette del fascio per P sono

$r_m : -m(x-6) + (y-1) = 0$ ovvero $r_m : -mx + y = -6m + 1$.

r_m è tangente a $\mathcal{C}$ se e solo se $\text{dist}(r_m, C) = \sqrt{2}$.

$\text{dist}(r_m, C) = \frac{|-2m+3+6m-1|}{\sqrt{1+m^2}}$. Per cui $\text{dist}(r_m, C) = \sqrt{2} \iff 7m^2 + 8m + 1 = 0$

$\iff m = -1$ oppure $m = -\frac{1}{7}$. $t_1 : x + y = 7$, $t_2 : \frac{1}{7}x + y = \frac{13}{7}$

6) $Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. 7) $s : x + 2y = 8$ ha pendenza $-\frac{1}{2}$. Per cui

$R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + Q_{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{16}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ 6{,}4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i piani π_1, π_2 ed il punto P dati di seguito*

$$\pi_1 : x + 2y - z = 2, \quad \pi_2 : 2x + 3y - z = 2 \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di π_1 e π_2 senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Usare il fascio di piani per la retta $\pi_1 \cap \pi_2$ per trovare il piano passante per P e per $\pi_1 \cap \pi_2$.*
3. *(2 punti) Trovare un vettore normale n_1 al piano π_1, un vettore normale n_2 al piano π_2 e calcolare $v = n_1 \wedge n_2$.*
4. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.*
5. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale H di P sulla retta $\pi_1 \cap \pi_2$.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza di P da $\pi_1 \cap \pi_2$.*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow rg(A|b) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

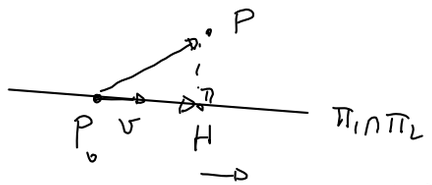
$\Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ e $\pi_1 \nparallel \pi_2$.

2) $\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x+2y-z-2) + \beta(2x+3y-z-2) = 0$. $P \in \pi_{\alpha,\beta} \Leftrightarrow -3\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$

Il piano cercato è $\pi_{1,-3} : 5x + 7y - 2z = 4$

3) $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$. $\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle v \rangle$

5) 

$\vec{P_0H} = pr_v(\vec{P_0P}) = \dfrac{\vec{P_0P} \cdot v}{v \cdot v} v$. $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H = P_0 + \dfrac{\vec{P_0P} \cdot v}{v \cdot v} v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

6) $dist(P, \pi_1 \cap \pi_2) = \|\vec{HP}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 10 \\ 8 & -13 & 20 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A.*
6. *(1 punto) Calcolare A^{100}.*
7. *(1 punto) Sia A una matrice 3×3 con le seguenti proprietà: $A^3 = 0_{3\times 3}$, A non è diagonalizzabile, il nucleo di A ha dimensione due. Se una tale matrice esiste trovarla altrimenti dimostrare che non può esistere.*

1) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-3 & 6 & -10 \\ -8 & x+13 & -20 \\ -4 & 6 & x-9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & -x-1 \\ -8 & x+13 & -20 \\ -4 & 6 & x-9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -8 & x+13 & -28 \\ -4 & 6 & x-13 \end{pmatrix}$

$= (x+1) \det \begin{pmatrix} x+13 & -28 \\ 6 & x-13 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x+1 & -2x-2 \\ 6 & x-13 \end{pmatrix}$

$= (x+1) \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 6 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x+1 & 6 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1)^2 (x-1)$

2) $P_A(0) = \det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$. $P_A(0) = -1 \Rightarrow \det A = 1$

3) $Sp(A) = \{-1, 1\}$.

4) $V_{-1}(A) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 6 & -10 \\ -8 & 12 & -20 \\ -4 & 6 & -10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 6 & -10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{4} & \frac{10}{4} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1(A) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 6 & -10 \\ -8 & 14 & -20 \\ -4 & 6 & -8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 6 & -10 \\ 0 & -10 & 20 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. $B = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A = BDB^{-1}$. $D^2 = \mathbb{1}_3 \Rightarrow A^2 = BD^2B^{-1} = \mathbb{1}_3 \Rightarrow A^{-1} = A$.

6) $A^{100} = BD^{100}B^{-1} = \mathbb{1}_3$

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha le proprietà richieste.

Esercizio 4. *Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Sia $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V e $\mathcal{B}_W = (w_1, w_2, w_3)$ una base di W.*

1. *(1 punto) Sia $f : V \to W$ una funzione. Cosa vuol dire che f è lineare?*
2. *(1 punto) Usare il lemma di scambio per dimostrare che i vettori*
$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$$
formano una base di V.
3. *(1 punto) Sia $f : V \to W$ l'applicazione lineare tale che*
$$f(v_1) = -w_1 + 3w_2 - 4w_3, \quad f(v_2) = -4w_1 - 3w_2 + w_3, \quad f(v_3) = 2w_1 + w_2.$$
Trovare la matrice A associata ad f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.
4. *(1 punto) Consideriamo i vettori*
$$u_4 = -3w_1 + 3w_2 + w_3 \quad u_5 = -w_2 + w_3 \quad u_6 = w_1 - w_2$$
Dimostrare che (u_4, u_5, u_6) è una base di W.
5. *(2 punti) Trovare la matrice C associata ad f nelle basi $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathcal{B}_2 = (u_4, u_5, u_6)$.*

~~6. (1 punto) Dimostrare che f è invertibile e calcolare f^{-1}~~

7. *(1 punto) Siano dati tre vettori $u, v, w \in V$ tali che $\mathrm{span}(u, v, w) = \mathrm{span}(u, v)$. Cosa possiamo dire dell'insieme (u, v, w)? (Motivare la risposta)*

1) $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v_1, v_2 \in V$

2) $u_1 = v_1 + v_2$. Poiché il coefficiente di v_1 è diverso da zero, per il lemma di scambio
$V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(u_1, v_2, v_3)$.
$u_2 = u_1 + v_3$. Poiché il coefficiente di v_3 è diverso da zero, per il lemma di scambio si ha
$\mathrm{Span}(u_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(u_1, v_2, u_3)$.
$u_3 = u_2 + v_2$. Poiché il coefficiente di v_2 è diverso da zero, per il lemma di scambio si ha
$\Rightarrow V = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$, $\dim V = |\mathcal{B}_V| = 3 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ è una base di V.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{C}) = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$
perché $\det(F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{C})) = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. Poiché
$F_{\mathcal{B}_W}^{-1}$ è un isomorfismo lineare ne segue che $\mathcal{C}$ è una base di W.

5)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[r, "f"] & W \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{C}^3 \arrow[r, "B_1"] & \mathbb{C}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^3 & \mathbb{C}^3 \arrow[l, "B_2"'] \end{tikzcd}$$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $C = B_2^{-1} A B_1 =$

5)
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"] & W \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{C}^3 \arrow[r, "B_1"] \arrow[rrr, bend right, "C"'] & \mathbb{C}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^3 & \mathbb{C}^3 \arrow[l, "B_2"']
\end{tikzcd}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = B_2^{-1} A B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -11 \\ 5 & 2 & 9 \\ -29 & -18 & -40 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$ calcolate con l'algoritmo di inversione

6) Se $\mathrm{Span}(u, v, w) = \mathrm{Span}(u, v)$ per il lemma di dipendenza lineare questo implica che l'insieme $\{u, v, w\}$ è linearmente dipendente.

Esercizio 5. *Consideriamo il polinomio* $p(X) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 20x_2 + 36$ *e la corrispondente conica* $\mathcal{C}_p = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid p(X) = 0\}$.

1. *(1 punto) Trovare le matrici* A *e* b *tali che* $p(X) = X^tAX + 2b \cdot X + 36$.
2. *(1 punto) Trovare, se esiste, un centro* C *della conica* $\mathcal{C}_p$.
3. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane degli assi di simmetria della conica* $\mathcal{C}_p$.
4. *(2 punti) Trovare la forma canonica metrica di* $\mathcal{C}_p$ *specificando i cambiamenti di coordinate.*
5. *(1 punto) Disegnare* $\mathcal{C}_p$.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

2) $AX = -b \qquad (A|-b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 8 & 32 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$. $\mathcal{C}_p$ è a centro. Ha un'unico centro uguale a $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3) $P_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\, x + \det A = x^2 - 6x + 8$

$P_A(x) = 0 \iff x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$. $\quad Sp(A) = \{4, 2\}$.

$V_4(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\quad V_2(A) = V_4(A)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Gli assi sono $s_1 = C + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : x + y = 6$ e

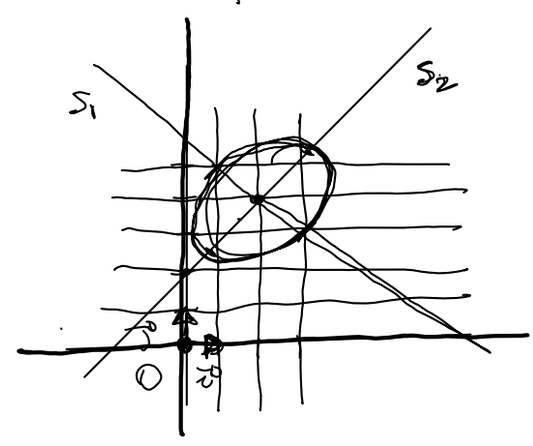
$s_2 = C + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : x - y = -2$.

4) $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$X = Y + C$. $\quad p(X) = p(Y+C) = Y^tAY + p(C) = Y^tAY - 8 = q(Y)$

$Z = BY \qquad q(Z) = 4z_1^2 + 2z_2^2 - 8$

$\mathcal{C}_p : \quad \dfrac{z_1^2}{2} + \dfrac{z_2^2}{4} = 1 \qquad$ Ellisse reale.



5) $z_2 = 0 \qquad z_1 = \pm\sqrt{2}$

$z_1 = 0 \qquad z_2 = \pm 2$