

Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Quarto appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

14 luglio 2026

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i punti $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed il numero $r = \sqrt{2}$.

1. (1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e raggio r .
2. (1 punto) Trovare l'equazione cartesiana della retta t passante per C ed ortogonale al segmento CP .
3. (1 punto) Dare una parametrizzazione della retta s passante per P e C tale che C si trovi al tempo 0 e P al tempo 1.
4. (1 punto) Sia $P_{\theta_1} \in \mathcal{C} \cap t$. Utilizzare la parametrizzazione del punto precedente per trovare un valore t_0 del parametro tale che $t_0 > 0$ ed il corrispondente punto $P_{t_0} \in s$ formi un triangolo $CP_{\theta_1}P_{t_0}$ di area uguale a 10.
5. (1 punto) Trovare le equazioni cartesiane delle due rette t_1 e t_2 passanti per P e tangenti a $\mathcal{C}$.
6. (1 punto) Scrivere la matrice di riflessione ortogonale Q_m attraverso la retta $y = mx$.
7. (1 punto) Calcolare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta s passante per P e C .

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i piani π_1 , π_2 ed il punto P dati di seguito

$$\pi_1 : x + 2y - z = 2, \quad \pi_2 : 2x + 3y - z = 2 \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di π_1 e π_2 senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Usare il fascio di piani per la retta $\pi_1 \cap \pi_2$ per trovare il piano passante per P e per $\pi_1 \cap \pi_2$.
3. (2 punti) Trovare un vettore normale n_1 al piano π_1 , un vettore normale n_2 al piano π_2 e calcolare $v = n_1 \wedge n_2$.
4. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.
5. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale H di P sulla retta $\pi_1 \cap \pi_2$.
6. (1 punto) Calcolare la distanza di P da $\pi_1 \cap \pi_2$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 10 \\ 8 & -13 & 20 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
3. (1 punto) *Calcolare lo spettro di A .*
4. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice B invertibile ed una matrice D diagonale tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. (1 punto) *Calcolare l'inversa di A .*
6. (1 punto) *Calcolare A^{100} .*
7. (1 punto) *Sia A una matrice 3×3 con le seguenti proprietà: $A^3 = 0_{3 \times 3}$, A non è diagonalizzabile, il nucleo di A ha dimensione due. Se una tale matrice esiste trovarla altrimenti dimostrare che non può esistere.*

Esercizio 4. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Sia $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V e $\mathcal{B}_W = (w_1, w_2, w_3)$ una base di W .

1. (1 punto) Sia $f : V \rightarrow W$ una funzione. Cosa vuol dire che f è lineare?

2. (1 punto) Usare il lemma di scambio per dimostrare che i vettori

$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$$

formano una base di V .

3. (1 punto) Sia $f : V \rightarrow W$ l'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = -w_1 + 3w_2 - 4w_3, \quad f(v_2) = -4w_1 - 3w_2 + w_3, \quad f(v_3) = 2w_1 + w_2.$$

Trovare la matrice A associata ad f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.

4. (1 punto) Consideriamo i vettori

$$u_4 = -3w_1 + 3w_2 + w_3 \quad u_5 = -w_2 + w_3 \quad u_6 = w_1 - w_2$$

Dimostrare che (u_4, u_5, u_6) è una base di W .

5. (2 punti) Trovare la matrice C associata ad f nelle basi $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathcal{B}_2 = (u_4, u_5, u_6)$.

6. (1 punto) Siano dati tre vettori $u, v, w \in V$ tali che $\text{span}(u, v, w) = \text{span}(u, v)$. Cosa possiamo dire dell'insieme (u, v, w) ? (Motivare la risposta)

Esercizio 5. Consideriamo il polinomio $p(X) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 20x_2 + 36$ e la corrispondente conica $\mathcal{C}_p = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid p(X) = 0\}$.

1. (1 punto) Trovare le matrici A e b tali che $p(X) = X^tAX + 2b \cdot X + 36$.
2. (1 punto) Trovare, se esiste, un centro C della conica $\mathcal{C}_p$.
3. (2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane degli assi di simmetria della conica $\mathcal{C}_p$.
4. (2 punti) Trovare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}_p$ specificando i cambiamenti di coordinate.
5. (1 punto) Disegnare $\mathcal{C}_p$.