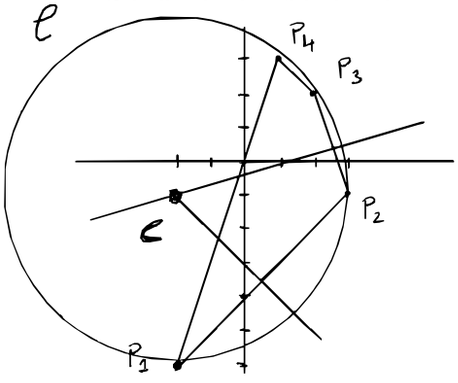
Esercizio 1. *In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo il poligono $\mathcal{P} = P_1P_2P_3P_4$ avente come vertici i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare il perimetro di $\mathcal{P}$.*
2. *(2 punti) Calcolare l'area di $\mathcal{P}$.*
3. *(2 punti) Calcolare le equazioni cartesiane degli assi dei quattro lati di $\mathcal{P}$.*
4. *(2 punti) Stabilire se $\mathcal{P}$ è inscritto in una circonferenza ed in caso lo sia trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza ad esso circoscritta.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.



1) $\|\vec{P_1P_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{2}$; $\|\vec{P_2P_3}\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10}$, $\|\vec{P_3P_4}\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$,
$\|\vec{P_4P_1}\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = 3\sqrt{10}$ Perimetro $= 6\sqrt{2} + 4\sqrt{10}$

2) $\text{Area}(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|5 \cdot 4 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 10\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 10$

$\text{Area}(P_1P_3P_4) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{P_1P_3}, \vec{P_1P_4}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|4 \cdot 3 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 6\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 6$

$\Rightarrow \text{Area}(\mathcal{P}) = \text{Area}(P_1P_2P_3) + \text{Area}(P_1P_3P_4) = 10 + 6 = 16$

3) Ass P_1P_2: $\vec{P_1P_2} \cdot X = \frac{P_2^2 - P_1^2}{2}$: $5x + 5y = \frac{10 - 40}{2} = -15$: $x + y = -3$

Ass P_2P_3: $\vec{P_2P_3} \cdot X = \frac{P_3^2 - P_2^2}{2}$: $-x + 3y = \frac{8 - 10}{2} = -1$: $x - 3y = 1$

Ass P_3P_4: $\vec{P_3P_4} \cdot X = \frac{P_4^2 - P_3^2}{2}$: $-x + y = \frac{10 - 8}{2} = 1$: $-x + y = 1$

Ass P_1P_4: $\vec{P_1P_4} \cdot X = \frac{P_4^2 - P_1^2}{2}$: $3x + 9y = \frac{10 - 40}{2} = -15$: $x + 3y = -5$

4) $C: \begin{cases} x + y = -3 \\ x - 3y = 1 \\ -x + y = 1 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Gli assi si intersecano nel punto $C = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{P}$ è inscritto in una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e raggio $r = \|\vec{CP_1}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| = 5$.

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \,\middle|\, \forall \vartheta \in [0, 2\pi) \right\}$: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Esercizio 2. *In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo i vettori v_1, v_2 ed n definiti come segue:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ed i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1. *(2 punti) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano $\pi_1 = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche del piano $\pi_2 : n \cdot X = n \cdot Q$.*
4. *(1 punto) Calcolare il volume del parallelepipedo con spigoli v_1, v_2 ed n.*
5. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle rette $r_1 = P + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = Q + \langle v_2 \rangle$ senza cambiare la loro forma*
6. *(1 punto) Siano date due rette parametriche $s_1 = P_1 + \langle w_1 \rangle$ ed $s_2 = P_2 + \langle w_2 \rangle$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la tabella delle posizioni reciproche delle due rette in funzione dei dati P_1, P_2, w_1 e w_2.*

Soluzione Esercizio 2.

1) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2) $\pi_1 : v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P : x - 2y - 5z = 2$

3) $\pi_2 : 3x + y - 2z = 5$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \pi_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) $V_0\left(\beta(v_1, v_2, n)\right) = \left|\det(v_1, v_2, n)\right| = \left| v_1 \wedge v_2 \cdot n \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = |3 - 2 + 10| = \underline{11}$

5) $v_1 \wedge v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow r_1$ ed r_2 non sono parallele.

$\det(v_1, v_2, P - Q) = v_1 \wedge v_2 \cdot (P - Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 - 6 + 5 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ sghembe.

6)

	$\operatorname{rg}(w_1 \mid -w_2)$	$\operatorname{rg}(w_1 \; -w_2 \; P_2 - P_1)$
$s_1 \equiv s_2$	1	1
$s_1 \parallel s_2$	1	2
$s_1 \cap s_2 = \{P_0\}$	2	2
sghembe	2	3

dove $P_0 = P_1 + t_0 w_1 = P_2 + s_0 w_2$ dove $\begin{pmatrix} t_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione di $(w_1 \; -w_2 \mid P_2 - P_1)$

Esercizio 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 4 & 0 \\ 6 & -25 & -8 & 10 \\ -18 & 72 & 23 & -30 \\ 0 & -12 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare A^2.*
2. *(1 punto) Calcolare A^{-1}.*
3. *(1 punto) Calcolare A^{101}.*
4. *(1 punto) Calcolare $|\det(A)|$.*
5. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico $p_A(x)$ di A.*
6. *(1 punto) Determinare lo spettro di A.*
7. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Soluzione Esercizio 3.

5) $p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -12 & -4 & 0 \\ -6 & x+25 & 8 & -10 \\ 18 & -72 & x-23 & 30 \\ 0 & 12 & 4 & x-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1 & -12 & -4 & 0 \\ -6 & x+25 & 8 & -10 \\ 0 & 3x+3 & x+1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & x-1 \end{pmatrix}$

$= \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -4 & 0 \\ -6 & x+1 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 4 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1)^2(x-1)^2$

6) $Sp(A) = \{1, -1\}$.

7) $V_1(A) = \ker(\mathbb{1}_4 - A) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -12 & -4 & 0 \\ -6 & 26 & 8 & -10 \\ 18 & -72 & -22 & 30 \\ 0 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/9 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{-1}(A) = \ker(-\mathbb{1}_4 - A) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -12 & -4 & 0 \\ -6 & 24 & 8 & -10 \\ 18 & -72 & -24 & 30 \\ 0 & 12 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$. $B^{-1}AB = D$.

1) $A^2 = BD^2B^{-1} = B\mathbb{1}_4B^{-1} = \mathbb{1}_4$ 2) $A^{-1} = A$ 3) $A^{101} = BD^{101}B^{-1} = BDB^{-1} = A$

4) $A^2 = \mathbb{1}_4 \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow |\det A| = 1$.

Esercizio 4. *Si consideri la funzione lineare "valutazione multipla"*

$$\mathrm{Val}_{0,1,2} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3 : \; p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare* $\mathrm{Val}_{0,1,2}(1 - 3x + 2x^2)$.
2. *(2 punti) Dimostrare che* $\mathrm{Val}_{0,1,2}$ *è un isomorfismo.*
3. *(1 punto) Trovare la matrice* $\mathrm{Van}(0,1,2)$ *associata a* $\mathrm{Val}_{0,1,2}$ *nelle basi standard.*
4. *(1 punto) Calcolare* $D(0,1,2) := \det(\mathrm{Van}(0,1,2))$.
5. *(1 punti) Calcolare il polinomio interpolatore dei tre punti* $(0,1)$, $(1,-1)$ *e* $(2,3)$.
6. *(1 punto) Se una matrice* A *di taglia* $m \times n$ *ha rango* m*, è vero che il sistema* $AX = b$ *è risolubile per ogni* b*? (Motivare la risposta.)*

Teo fond alg.

Soluzione Esercizio 4.

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\ker \mathrm{Val}_{0,1,2} = \{ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(0)=p(1)=p(2)=0 \} \Downarrow = \{ 0_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}} \}$

$\Rightarrow \mathrm{Val}_{0,1,2}$ è iniettiva. $\dim \mathrm{Im}\, \mathrm{Val}_{0,1,2} = 3 - \dim \ker \mathrm{Val}_{0,1,2} = 3 \Rightarrow$ Suriettiva

3) $\mathrm{Van}(0,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $D(0,1,2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

↑ dtt di Vandermonde

5) $\mathrm{Van}(0,1,2) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Il polinomio interpolatore è $p(x) = 1 - 5x + 3x^2$

6) Sì! Infatti: $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ e $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, S_A$ per definizione.

Per cui se $\mathrm{rg}\, A = m$ allora S_A è suriettiva e quindi

$\forall\, b \in \mathbb{K}^m \; \exists\, X \in \mathbb{K}^n$ t.c. $S_A(X) = b$ ovvero $AX = b$.

Esercizio 5. *Dati due numero reali $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice*

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di $A(a,b)$.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico $p_{A(a,b)}(x)$ di $A(a,b)$.*
3. *(1 punto) Determinare lo spettro di $A(a,b)$.*
4. *(1 punto) Trovare tutti i valori di a e b per cui $A(a,b)$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Per ogni a e b trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t AB = D$.*
6. *(1 punto) Trovare tutti i valori di a e b per cui $A(a,b)$ è invertibile e per tali valori calcolare $A(a,b)^{-1}$.*
7. *(1 punto) Trovare tutti i valori di a e b per cui $A(a,b)$ è un'isometria lineare di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.*

Soluzione Esercizio 5.

1) $\det A(a,b) = a^2 - b^2$

2) $P_{A(a,b)}(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A(a,b))\,x + \det A(a,b) = x^2 - 2a\,x + a^2 - b^2$

3) $P_{A(a,b)}(x) = 0 \iff x = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}}{2} = a \pm b$ $\quad \mathrm{Sp}(A(a,b)) = \{a-b, a+b\}$

4) Per il Teorema spettrale, poiché $A(a,b)^t = A(a,b)$, essa è ortogonalmente diagonalizzabile per ogni a e per ogni b.

5) $V_{a-b}(A(a,b)) = \ker \begin{pmatrix} -b & -b \\ -b & -b \end{pmatrix} = \ker(-b \; -b) = \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{se } b = 0 \end{cases}$

$V_{a+b}(A(a,b)) = V_{a-b}(A(a,b))^{\perp}$ se $a+b \neq a-b \iff b \neq -b \iff b \neq 0$

$V_{a+b}(A(a,b)) = \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{se } b = 0 \end{cases}$

$B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ se $b \neq 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se $b = 0$.

6) $\det A(a,b) \neq 0 \iff a^2 \neq b^2$

$A(a,b)^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$

7) $a = \cos\vartheta$, $b = \sin\vartheta$ $\forall \vartheta \in [0, 2\pi)$.