

Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Quinto appello a.a. 2025/26
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

11 settembre 2026

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo il poligono $\mathcal{P} = P_1P_2P_3P_4$ avente come vertici i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare il perimetro di $\mathcal{P}$.
2. (2 punti) Calcolare l'area di $\mathcal{P}$.
3. (2 punti) Calcolare le equazioni cartesiane degli assi dei quattro lati di $\mathcal{P}$.
4. (2 punti) Stabilire se $\mathcal{P}$ è inscritto in una circonferenza ed in caso lo sia trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza ad esso circoscritta.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo i vettori v_1, v_2 ed n definiti come segue:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ed i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1. (2 punti) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
2. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano $\pi_1 = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche del piano $\pi_2 : n \cdot X = n \cdot Q$.
4. (1 punto) Calcolare il volume del parallelepipedo con spigoli v_1, v_2 ed n .
5. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle rette $r_1 = P + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = Q + \langle v_2 \rangle$ senza cambiare la loro forma
6. (1 punto) Siano date due rette parametriche $s_1 = P_1 + \langle w_1 \rangle$ ed $s_2 = P_2 + \langle w_2 \rangle$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la tabella delle posizioni reciproche delle due rette in funzione dei dati P_1, P_2, w_1 e w_2 .

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 4 & 0 \\ 6 & -25 & -8 & 10 \\ -18 & 72 & 23 & -30 \\ 0 & -12 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare A^2 .
2. (1 punto) Calcolare A^{-1} .
3. (1 punto) Calcolare A^{101} .
4. (1 punto) Calcolare $|\det(A)|$.
5. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico $p_A(x)$ di A .
6. (1 punto) Determinare lo spettro di A .
7. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. Si consideri la funzione lineare “valutazione multipla”

$$\text{Val}_{0,1,2} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare $\text{Val}_{0,1,2}(1 - 3x + 2x^2)$.
2. (2 punti) Dimostrare che $\text{Val}_{0,1,2}$ è un isomorfismo.
3. (1 punto) Trovare la matrice $\text{Van}(0, 1, 2)$ associata a $\text{Val}_{0,1,2}$ nelle basi standard.
4. (1 punto) Calcolare $D(0, 1, 2) := \det(\text{Van}(0, 1, 2))$.
5. (1 punto) Calcolare il polinomio interpolatore dei tre punti $(0, 1)$, $(1, -1)$ e $(2, 3)$.
6. (1 punto) Se una matrice A di taglia $m \times n$ ha rango m , è vero che il sistema $AX = b$ è risolubile per ogni b ? (Motivare la risposta.)

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. *Dati due numero reali $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice*

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante di $A(a, b)$.*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico $p_{A(a, b)}(x)$ di $A(a, b)$.*
3. (1 punto) *Determinare lo spettro di $A(a, b)$.*
4. (1 punto) *Trovare tutti i valori di a e b per cui $A(a, b)$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. (1 punto) *Per ogni a e b trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.*
6. (1 punto) *Trovare tutti i valori di a e b per cui $A(a, b)$ è invertibile e per tali valori calcolare $A(a, b)^{-1}$.*
7. (1 punto) *Trovare tutti i valori di a e b per cui $A(a, b)$ è un'isometria lineare di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.*

Soluzione Esercizio 5.