Esame scritto di Geometria.
Ingegneria chimica.
Terzo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

16 giugno 2026

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo le rette*

$$r_1 : x - 3y = 2, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_3 : x + 2y = 7.$$

1. *(1 punto) Calcolare i punti* $P_1 = r_1 \cap r_2$, $P_2 = r_2 \cap r_3$ *e* $P_3 = r_1 \cap r_3$ *senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* $T = P_1P_2P_3$.
3. *(2 punti) Calcolare equazioni cartesiane dei tre assi del triangolo* T.
4. *(1 punto) Calcolare il circocentro* C *del triangolo* T.
5. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza circoscritta a* T.
6. *(1 punto) Calcolare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_2 *attraverso* r_1.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo il piano e le due rette*

$$\pi : x - y + z = 1, \quad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r *ed* s *senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* π *ed* r *senza cambiare la loro forma.*
3. *(1 punto) Trovare i punti* $P_1 = \pi \cap r$, $P_2 = \pi \cap s$ *e* $P_3 = r \cap s$.
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* $P = P_1P_2P_3$.
5. *(1 punto) Calcolare il perimetro del triangolo* $P = P_1P_2P_3$.
6. *(1 punto) Sia* $v_1 = \overrightarrow{P_3P_1}$ *e* $v_2 = \overrightarrow{P_3P_2}$. *Calcolare* $v = v_1 \wedge v_2$ *e considerare la retta* $t = P_3 + \langle v \rangle$. *Calcolare il punto* $P_4 = t \cap \pi$.
7. *(1punto) Ricordando che il volume di un tetraedro è dato dalla terza parte dell'area di una faccia per la sua altezza, calcolare il volume del tetraedro* $P_1P_2P_3P_4$.

Esercizio 3. *Si considerino i vettori* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e la matrice* $A = vw^t$.

1. *(1 punto) Calcolare la matrice* A.
2. *(1 punto) Calcolare una base di* $\mathrm{Col}(A)$.
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
5. *(1 punto) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
6. *(1 punto) Dimostrare la seguente formula, nota come* formula di Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

7. *(1 punto) Per* $n \geq 2$, *siano* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *due vettori non-nulli e tali che* $v \cdot w = 0$. *Dimostrare che la matrice* $A = vw^t$ *non è diagonalizzabile.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi vettoriali $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ *e* $W = \langle w_1, w_2 \rangle$*.*

1. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane di* U*.*
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$*.*
3. *(2 punti) Calcolare la matrice* A *associata a* pr_U^W *nella base standard di* $\mathbb{R}^4$*.*
4. *(1 punto) Calcolare* $\mathrm{pr}_U^W(P)$*.*
5. *(1 punto) Calcolare la matrice* A' *associata a* pr_W^U *nella base standard di* $\mathbb{R}^4$*.*
6. *(1 punto) Dimostrare che* $AA' = A'A = 0_{4\times 4}$ *è la matrice nulla.*

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
4. *(2 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonali tali che $B^t AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{-1}.*
6. *(1 punto) Sia $n \geq 2$ e siano A e B due matrici simmetriche $n \times n$ tali che $AB = BA$. Dimostrare che la matrice AB è ortogonalmente diagonalizzabile.*