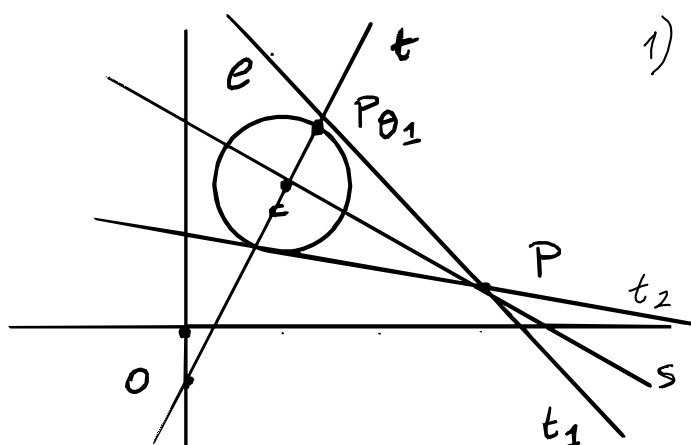


Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i punti $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed il numero $r = \sqrt{2}$.

- (1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e raggio r .
- (1 punto) Trovare l'equazione cartesiana della retta t passante per C ed ortogonale al segmento CP .
- (1 punto) Dare una parametrizzazione della retta s passante per P e C tale che C si trovi al tempo 0 e P al tempo 1.
- (1 punto) Sia $P_{\theta_1} \in \mathcal{C} \cap t$. Utilizzare la parametrizzazione del punto precedente per trovare un valore t_0 del parametro tale che $t_0 > 0$ ed il corrispondente punto $P_{t_0} \in s$ formi un triangolo $CP_{\theta_1}P_{t_0}$ di area uguale a 10.
- (1 punto) Trovare le equazioni cartesiane delle due rette t_1 e t_2 passanti per P e tangenti a $\mathcal{C}$.
- (1 punto) Scrivere la matrice di riflessione ortogonale Q_m attraverso la retta $y = mx$.
- (1 punto) Calcolare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta s passante per P e C .



$$1) \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \forall \theta \in [0, 2\pi) \right\} ; (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$

$$2) t: \vec{CP} \cdot X = \vec{CP} \cdot C \quad \vec{CP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ t: 4x - 2y = 2 \quad t: 2x - y = 1$$

$$3) s = C + \langle \vec{CP} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$4) P_t = C + t \vec{CP} = \begin{pmatrix} 2+4t \\ 3-2t \end{pmatrix}$$

$$\text{Area}(P_t C P_{\theta_1}) = \frac{1}{2} r \|\vec{CP}_t\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} |t| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 4|t|\sqrt{10}$$

$$4|t|\sqrt{10} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm \sqrt{10} \quad \boxed{t_0 = \sqrt{10}}$$

5) La retta $x=6$ non interseca $\mathcal{C}$. Le altre rette del fascio per P sono

$$r_m: -m(x-6) + (y-1) = 0 \quad \text{ovvero} \quad r_m: -mx + y = -6m + 1$$

r_m è Tangente a $\mathcal{C}$ se e solo se $\text{dist}(r_m, C) = \sqrt{2}$.

$$\text{dist}(r_m, C) = \frac{|-2m + 3 + 6m - 1|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{Per cui} \quad \text{dist}(r_m, C) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 7m^2 + 8m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \quad \text{oppure} \quad m = -\frac{1}{7} \quad t_1: x+y=7, \quad t_2: \frac{1}{7}x+y=\frac{13}{7}$$

$$6) Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \quad 7) s: x+2y=8 \text{ ha pendenza } -\frac{1}{2} \quad \text{Per cui}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + Q_{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{16}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i piani π_1 , π_2 ed il punto P dati di seguito

$$\pi_1 : x + 2y - z = 2, \quad \pi_2 : 2x + 3y - z = 2 \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di π_1 e π_2 senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Usare il fascio di piani per la retta $\pi_1 \cap \pi_2$ per trovare il piano passante per P e per $\pi_1 \cap \pi_2$.
3. (2 punti) Trovare un vettore normale n_1 al piano π_1 , un vettore normale n_2 al piano π_2 e calcolare $v = n_1 \wedge n_2$.
4. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.
5. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale H di P sulla retta $\pi_1 \cap \pi_2$.
6. (1 punto) Calcolare la distanza di P da $\pi_1 \cap \pi_2$.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{rg}(A|b) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \pi_1 \nparallel \pi_2.$$

$$2) \quad \pi_{\alpha, \beta} : \alpha(x + 2y - z - 2) + \beta(2x + 3y - z - 2) = 0. \quad P \in \pi_{\alpha, \beta} \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad -3\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$$

$$\text{Il piano cercato è } \pi_{1, -3} : 5x + 7y - 2z = 4$$

$$3) \quad n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right). \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle v \rangle$$

$$5) \quad \begin{array}{c} \text{Diagramma:} \\ \begin{array}{c} P \\ \swarrow \text{vettore } \vec{P_0P} \\ \text{Punto } P_0 \text{ sulla retta } \pi_1 \cap \pi_2 \\ \downarrow \text{vettore } \vec{P_0H} \\ \text{Punto } H \text{ sulla retta } \pi_1 \cap \pi_2 \end{array} \end{array} \quad \vec{P_0H} = \text{pr}_v(\vec{P_0P}) = \frac{\vec{P_0P} \cdot v}{v \cdot v} v. \quad P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = P_0 + \frac{\vec{P_0P} \cdot v}{v \cdot v} v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$6) \quad \text{dist}(P, \pi_1 \cap \pi_2) = \|\vec{HP}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}$$

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 10 \\ 8 & -13 & 20 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
2. (1 punto) Calcolare il determinante di A .
3. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
4. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
5. (1 punto) Calcolare l'inversa di A .
6. (1 punto) Calcolare A^{100} .
7. (1 punto) Sia A una matrice 3×3 con le seguenti proprietà: $A^3 = 0_{3 \times 3}$, A non è diagonalizzabile, il nucleo di A ha dimensione due. Se una tale matrice esiste trovarla altrimenti dimostrare che non può esistere.

$$\begin{aligned} 1) \quad P_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-3 & 6 & -10 \\ -8 & x+13 & -20 \\ -4 & 6 & x-9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & -x-1 \\ -8 & x+13 & -20 \\ -4 & 6 & x-9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -8 & x+13 & -28 \\ -4 & 6 & x-13 \end{pmatrix} \\ &= (x+1) \det \begin{pmatrix} x+13 & -28 \\ 6 & x-13 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x+1 & -2x-2 \\ 6 & x-13 \end{pmatrix} \\ &= (x+1) \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 6 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x+1 & 6 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1)^2 (x-1) \end{aligned}$$

$$2) \quad P_A(0) = \det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A. \quad P_A(0) = -1 \Rightarrow \det A = 1$$

$$3) \quad Sp(A) = \{-1, 1\}.$$

$$4) \quad V_{-1}(A) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 6 & -10 \\ -8 & 12 & -20 \\ -4 & 6 & -10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{4} & \frac{10}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1(A) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 6 & -10 \\ -8 & 14 & -20 \\ -4 & 6 & -8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 6 & -10 \\ 0 & -10 & 20 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A \text{ è diagonalizzabile su } \mathbb{R}. \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = B D B^{-1}. \quad D^2 = \mathbb{I}_3 \Rightarrow A^2 = B D^2 B^{-1} = \mathbb{I}_3 \Rightarrow A^{-1} = A.$$

$$6) \quad A^{100} = B D^{100} B^{-1} = \mathbb{I}_3$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ha le proprietà richieste.}$$

Esercizio 4. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Sia $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V e $\mathcal{B}_W = (w_1, w_2, w_3)$ una base di W .

1. (1 punto) Sia $f: V \rightarrow W$ una funzione. Cosa vuol dire che f è lineare?

2. (1 punto) Usare il lemma di scambio per dimostrare che i vettori

$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$$

formano una base di V .

3. (1 punto) Sia $f: V \rightarrow W$ l'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = -w_1 + 3w_2 - 4w_3, \quad f(v_2) = -4w_1 - 3w_2 + w_3, \quad f(v_3) = 2w_1 + w_2.$$

Trovare la matrice A associata ad f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.

4. (1 punto) Consideriamo i vettori

$$u_4 = -3w_1 + 3w_2 + w_3, \quad u_5 = -w_2 + w_3, \quad u_6 = w_1 - w_2$$

Dimostrare che (u_4, u_5, u_6) è una base di W .

5. (2 punti) Trovare la matrice C associata ad f nelle basi $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathcal{B}_2 = (u_4, u_5, u_6)$.

~~Sottopunto) Dimostrare che f è invertibile e calcolarla.~~

7. (1 punto) Siano dati tre vettori $u, v, w \in V$ tali che $\text{span}(u, v, w) = \text{span}(u, v)$. Cosa possiamo dire dell'insieme (u, v, w) ? (Motivare la risposta)

$$1) f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v_1, v_2 \in V$$

$$2) u_1 = v_1 + v_2. \text{ Poiché il coefficiente di } v_1 \text{ è diverso da zero, per il lemma di scambio} \\ V = \text{span}(v_1, v_2, v_3) = \text{span}(u_1, v_2, v_3).$$

$$u_2 = u_1 + v_3. \text{ Poiché il coefficiente di } v_3 \text{ è diverso da zero, per il lemma di scambio si ha}$$

$$\text{span}(u_1, v_2, v_3) = \text{span}(u_1, v_2, u_2).$$

$$u_3 = u_2 + v_2. \text{ Poiché il coefficiente di } v_2 \text{ è diverso da zero, per il lemma di scambio si ha} \\ \Rightarrow V = \text{span}(u_1, u_2, u_3), \dim V = |\mathcal{B}_V| = 3 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) \text{ è una base di } V.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 4) F_{\mathcal{B}_W}(e) = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ è una base di } \mathbb{R}^3$$

$$\text{poiché } \det(F_{\mathcal{B}_W}(e)) = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Poiché}$$

$$F_{\mathcal{B}_W}^{-1} \text{ è un isomorfismo lineare ne segue che } e \text{ è una base di } W.$$

$$5) \begin{array}{c} V = V \xrightarrow{f} W \Rightarrow W \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C}^3 \xrightarrow{B_1} \mathbb{C}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^3 \xrightarrow{B_2} \mathbb{C}^3 \end{array} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = B_2^{-1} A B_1 =$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 5) & V & = & V & \xrightarrow{f} & W & = & W \\
 & \downarrow F_{B_1} & & \downarrow F_{B_v} & & \downarrow F_{B_w} & & \downarrow F_{B_2} \\
 & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{B_1} & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{B_2} & \mathbb{C}^3 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & \mathbb{C} & & & &
 \end{array}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = B_2^{-1} A B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -11 \\ 5 & 2 & 9 \\ -29 & -18 & -40 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ calcolate con l'algoritmo di inversione}$$

6) Se $\text{Span}(u, v, w) = \text{Span}(u, v)$ per il lemma di dipendenza lineare questo implica che l'insieme $\{u, v, w\}$ è linearmente dipendente.

Esercizio 5. Consideriamo il polinomio $p(X) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 20x_2 + 36$ e la corrispondente conica $C_p = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid p(X) = 0\}$.

1. (1 punto) Trovare le matrici A e b tali che $p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + 36$.
2. (1 punto) Trovare, se esiste, un centro C della conica C_p .
3. (2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane degli assi di simmetria della conica C_p .
4. (2 punti) Trovare la forma canonica metrica di C_p specificando i cambiamenti di coordinate.
5. (1 punto) Disegnare C_p .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad AX = -b \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 8 & 32 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right). \quad C_p \text{ è a centro. Ha un'unico}$$

centro uguale a $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$3) \quad P_A(x) = x^2 - \text{Tr} A x + \det A = x^2 - 6x + 8$$

$$P_A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}. \quad \text{Sp}(A) = \{4, 2\}.$$

$$V_4(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad V_2(A) = V_4(A)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{Gli assi sono } S_1 = C + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle: x+y=6 \quad \text{e}$$

$$S_2 = C + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle: x-y=-2.$$

$$4) \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$X = Y + C. \quad p(X) = p(Y+C) = Y^t A Y + p(C) = Y^t A Y - 8 = q(Y)$$

$$Z = BY \quad q(Z) = 4z_1^2 + 2z_2^2 - 8$$

$$C_p: \quad \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{4} = 1 \quad \text{Ellisse reale.}$$

$$5) \quad \begin{matrix} z_2 = 0 & z_1 = \pm \sqrt{2} \\ z_1 = 0 & z_2 = \pm 2 \end{matrix}$$

