

Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Primo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

19 gennaio 2025

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i punti $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Denotiamo con $r = r_{P_1 P_2}$ la retta passante per P_1 e P_2 .

- (1 punto) Calcolare i coseni direttori e la pendenza della retta r .
- (1 punto) Calcolare il punto Q ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_4 attraverso la retta r .
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
- (1 punto) Scrivere il punto P_4 come combinazione convessa di P_1 , P_2 e P_3 .
- (1 punto) Scrivere qui sotto la formula per l'inversa di una matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Qui sotto, scrivere la matrice R_θ di rotazione in senso anti-orario di un angolo θ :

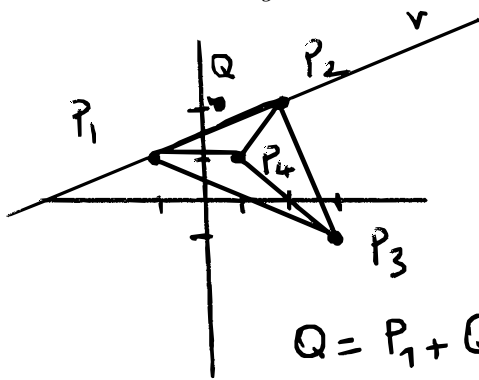
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Sia $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ una base di $\mathcal{V}_O^2$ tale che $\det(\mathcal{C}) = -3$. Siano

$$v_1 = 2u_1 + 5u_2, \quad v_2 = 3u_1 - u_2, \quad v = -3u_1 + 7u_2.$$

Dimostrare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$ e calcolare $F_{\mathcal{B}}(v)$.

Fare un disegno che illustri la situazione.



$$1) \quad r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle: \quad x - 3y = -4$$

$$m = \frac{1}{3}, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \text{coseni direttori.}$$

$$2) \quad Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \stackrel{m=\frac{1}{3}}{=} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$Q = P_1 + Q_{\frac{1}{3}} (P_4 - P_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \text{Aua}(T) = \frac{1}{2} |\det(P_2 - P_1, P_3 - P_1)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}| = \frac{1}{2} |-10| = 5.$$

$$\left. \begin{aligned} 4) \quad \text{Aua}(T_1) &= \frac{1}{2} |\det(P_2 - P_4, P_3 - P_4)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}| = 2 \\ \text{Aua}(T_2) &= \frac{1}{2} |\det(P_1 - P_4, P_3 - P_4)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}| = 2 \\ \text{Aua}(T_3) &= \frac{1}{2} |\det(P_1 - P_4, P_2 - P_4)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}| = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_4 = \frac{2}{5} P_1 + \frac{2}{5} P_2 + \frac{1}{5} P_3$$

$$7) \quad \det(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \det(e) = (-2-15)(-3) = 51 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ è base di } \mathcal{V}_O^2.$$

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -18 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i tre punti $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, i due vettori $v_1 = \overrightarrow{P_1 P_2}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_1 P_3}$ e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 + v_2 \rangle$ e $r_2 : \begin{cases} v_1 \cdot X = v_1 \cdot (P_1 + P_2) \\ v_2 \cdot X = v_2 \cdot (P_1 + P_2) \end{cases}$.

- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
- (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
- (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r_2 .
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
- (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
- (1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo T nel vertice P_1 .
- (1 punto) Date due rette $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $s : AX = b$ di $\mathbb{R}^3$, scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di r ed s e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.

$$v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, v_1 \cdot (P_1 + P_2) = 12, v_2 \cdot (P_1 + P_2) = 18.$$

1) r_1 ed r_2 sono sghembe. Infatti, $v_1 \cdot (v_1 + v_2) = 4 \neq 0 \Rightarrow r_1 \nparallel r_2$.

$$\begin{cases} v_1 \cdot (P_1 + t(v_1 + v_2)) = 12 \\ v_2 \cdot (P_1 + t(v_1 + v_2)) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = 7 \\ 7t = 8 \end{cases} \text{ non ha soluzione} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset$$

$$2) v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$3) r_2 = P_1 + P_2 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$1) \text{ Area}(T) = \frac{1}{2} \|v_1 \wedge v_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$) \text{ dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1 + \langle v_1 + v_2 \rangle, P_1 + P_2 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle) = \text{dist}(P_2, \langle v_1 + v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle)$$

$$(v_1 + v_2) \wedge (v_1 \wedge v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \left\| \text{pr}_{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}}(P_2) \right\| = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|-4 + 21 - 8|}{\sqrt{1 + 49 + 16}} = \frac{9}{\sqrt{66}}$$

$$6) P_1 + \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

7)

	$r_1 \equiv r_2$	$r_1 \parallel r_2$	$r_1 \cap r_2 = \{P_0\}$	sghembe
$\text{rg}(Av_i)$	0	0	1	1
$-b - AP_i$	0	1	1	2

$$P_0 = P_1 + t_0 v_1 \text{ dove } t_0(Av_1) = b - AP_1$$

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 10 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
- (2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
- (1 punto) Calcolare A^{2025} .
- (2 punti) Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo lineare di un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V . Dare la definizione di autovettore per f . **Dare la definizione di autovettore per f .**
- (1 punto) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Enunciare il criterio di diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di A .

$$\begin{aligned} 1. P_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-7 & 6 & 0 \\ -8 & x+7 & 0 \\ -10 & 7 & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x-7 & 6 \\ -8 & x+7 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x-1 & 6 \\ x-1 & x+7 \end{pmatrix} = \\ &= x \det \begin{pmatrix} x-1 & 6 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} = x(x+1)(x-1) \Rightarrow Sp(A) = \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

2. A ha 3 autovettori reali e distinti $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} V_{-1}(A) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -8 & 6 & 0 \\ -10 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -10 & 7 & -1 \\ -8 & 6 & 0 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$V_0(A) = \text{Ker } A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} V_1(A) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -10 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -10 & 7 & 1 \\ -10 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -10 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) A = (BDB^{-1})^{2025} = B D^{2025} B^{-1} = BDB^{-1} = A$$

4) Autovettore := È un vettore non-nullo $v \in V$ t.c. $f(v) \in \langle v \rangle$
Autovalore := È uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\exists v \in V \setminus \{0_v\}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

$$6) Sp(A) \subset \mathbb{K} \text{ e } m_{A_A}(\lambda) = m_{f_A}(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A).$$

Esercizio 4. Denotiamo $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo la funzione $f : V \rightarrow V$ data da

$$f(p(x)) = (x-1)p(x+1) + (x^2-1)p''(x^2+1) + (x+1)p'(x^2-1) - 3xp(x)$$

1. (1 punto) Calcolare $f(5+7x-x^2)$.
2. (1 punto) Dimostrare che f è lineare.
3. (1 punto) Calcolare la matrice A associata ad f nella base standard di V .
4. (1 punto) Dimostrare che f è invertibile.
5. (1 punto) Calcolare $f^{-1}(1+x+2x^2)$.
6. (1 punto) Sia $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. Dimostrare che $\mathcal{B} = (1+x, 1-x)$ è una base di W e definire la funzione lineare $g : W \rightarrow V$ tale che $g(1+x) = 1-2x+x^2$ e $g(1-x) = 2+3x-2x^2$. Calcolare la matrice C associata ad $f \circ g$ nelle basi standard di V e W .
7. (1 punto) Siano V e W due $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali e siano date due applicazioni lineari $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow V$ tali che f è suriettiva e g è iniettiva. Trovare una condizione che garantisca che $g \circ f$ è un isomorfismo lineare.

$$1) f(5+7x-x^2) = -19x^2$$

$$2) f = m_{x-1} \circ \text{Val}_{x+1} + m_{x^2-1} \circ \text{Val}_{x^2+1} \circ D \circ D + m_{x+1} \circ \text{Val}_{x^2-1} \circ D - m_{3x}$$

f è quindi una combinazione lineare di composizioni di funzioni lineari ed è quindi lineare.

$$3) f(1) = -1-2x \quad ; \quad f(x) = x-2x^2 \quad ; \quad f(x^2) = -5-3x+5x^2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$4) \det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = -19 \neq 0 \Rightarrow f \text{ è invertibile}$$

$$5) A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1+x+2x^2) = -1-x$$

$$6) 1-x \notin \langle 1+x \rangle \Rightarrow \mathcal{B} \text{ è base di } W, C = ADB^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 & 14 \\ 2 & 14 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}, \text{ dove}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \begin{array}{ccccc} W & & W & \xrightarrow{g} & V \\ \downarrow F_{\mathcal{B}} & & \downarrow F_{\mathcal{B}} & & \downarrow F_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$7) \dim V = \dim W.$$

Esercizio 5. Si consideri il vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, la matrice $A = vv^t$ ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

- (1 punto) Calcolare A .
- (1 punto) Trovare una base per $\text{Col}(A)$ e calcolare il rango di A .
- (1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(A)}$ del nucleo di A .
- (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.
- (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di Q sulla retta generata da v e la distanza di Q dall'iperpiano $\pi = v^\perp$.
- (1 punto) Sia A una matrice di taglia 5×7 . E' possibile che $A^t A$ sia invertibile? Perché?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\mathcal{B}_{\text{Col} A} = (v)$. $\text{rg } A = 1$.

3. $\text{Ker } A = v^\perp$; $-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$. $\mathcal{B}_{\text{Ker} A} = (v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

4. $A^t = (vv^t)^t = (v^t)^t v^t = vv^t = A$. Per il teorema spettrale A è ort. diag.

5. $F_1 = v_1$. $F_1 \cdot F_1 = 2$. $F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 \cdot F_2 = 6$. $F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F_3 \cdot F_3 = 12$.

$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\text{pr}_v(Q) = \frac{Q \cdot v}{v \cdot v} v = -\frac{5}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\text{dist}(Q, v^\perp) = \|\text{pr}_v(Q)\| = \frac{5}{2}$

7. No, non è possibile. Infatti, se $A^t A$ fosse invertibile, allora $7 = \text{rg } A^t A = \text{rg } A \leq 5$, assurdo!

