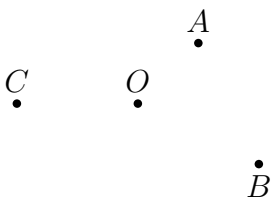


Esame scritto di Geometria.
Ingegneria civile.
Secondo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2026

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo anche le due rette $r_1 = P + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P + \langle v_2 \rangle$.

1. (1 punto) Calcolare $\cos \widehat{v_1 v_2}$.
2. (1 punto) Calcolare $F_{\mathcal{B}}(P)$.
3. (1 punto) Calcolare $P_1 = \text{pr}_{v_1}^{v_2}(\overrightarrow{OP})$ e $P_2 = \text{pr}_{v_2}^{v_1}(\overrightarrow{OP})$.
4. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana della retta r_1 .
5. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per P e per le punte di v_1 e di v_2 .
6. (1 punto) Calcolare il punto Q ottenuto ruotando il punto P attorno all'origine di un angolo di 60° in senso orario.
7. (1 punto) Consideriamo i seguenti punti O , A , B e C di $\mathcal{E}^2$:



Disegnare le due rette $r = r_{OA}$ e $s = r_{OC}$ ed i due punti D ed E tali che $\overrightarrow{OD} = \text{pr}_r^s(\overrightarrow{OB})$ e $\overrightarrow{OE} = \text{pr}_s^r(\overrightarrow{OB})$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare un vettore direttore v di r e w di s .
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r e di s .
4. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano π passante per s e parallelo ad r .
5. (1 punto) Calcolare la distanza tra r e π .
6. (1 punto) Dimostrare la seguente formula: data una retta $r = P_0 + \langle v \rangle$ ed un punto $P \in \mathbb{R}^3$, allora

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\|(P - P_0) \wedge v\|}{\|v\|}$$

7. (1 punto) Usare la formula precedente per trovare l'equazione del cilindro H di asse r e tangente a π .

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
3. (1 punto) *Calcolare lo spettro di A .*
4. (1 punto) *Trovare una base dell' autospazio di autovalore 1.*
5. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
6. (1 punto) *Sia $n \geq 2$ un intero e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Che cosa vuol dire che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?*
7. (1 punto) *E' vero che ogni matrice reale è diagonalizzabile sui reali? E sui complessi? (Se è vero dimostrarlo, altrimenti fornire un controesempio.)*

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}_2 = \left(w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e che $\mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. (1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3$ e $f(v_2) = w_1 + w_3$. Calcolare la matrice F associata a f nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.
3. (1 punto) Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione definita come segue:

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = (-4x - 3y + 2z)v_1 + (3x + 2y - 2z)v_2$$

Dimostrare che g è lineare.

4. (1 punto) Calcolare la matrice G associata a g nelle basi standard $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$.
5. (1 punto) Calcolare la matrice A associata a $g \circ f$ nella base standard $\mathcal{C}_2$.
6. (1 punto) Stabilire se $g \circ f$ è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa; altrimenti trovare una base per il suo nucleo e per la sua immagine.
7. (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice $B_2 = (w_1|w_2|w_3)$.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^4$, consideriamo:

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_U$ di U .
2. (2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U .
3. (1 punto) Calcolare la distanza di P da U .
4. (2 punti) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione di $U + W$.
5. (1 punto) Trovare una base ortogonale di $U + W$ e calcolare la proiezione ortogonale di Q su $U + W$ utilizzando i coefficienti di Fourier.