Esame scritto di Geometria.
Terzo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

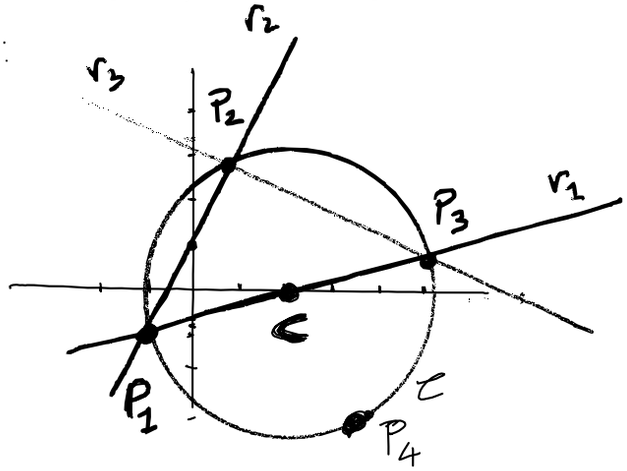
16 giugno 2026

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo le rette*

$$r_1 : x - 3y = 2, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_3 : x + 2y = 7.$$

1. *(1 punto) Calcolare i punti* $P_1 = r_1 \cap r_2$, $P_2 = r_2 \cap r_3$ *e* $P_3 = r_1 \cap r_3$ *senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* $T = P_1P_2P_3$.
3. *(2 punti) Calcolare equazioni cartesiane dei tre assi del triangolo* T.
4. *(1 punto) Calcolare il circocentro* C *del triangolo* T.
5. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza circoscritta a* T.
6. *(1 punto) Calcolare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_2 *attraverso* r_1.

Sol.:



1) $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}$ infatti,

$r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix} \mid \forall t \in \mathbb{R} \right\}$. $\begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix} \in r_1 \iff t = -1$

$\begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix} \in r_3 \iff t = 1$

$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \iff$ Cramer $x = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = 5$

$y = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = 1$

2) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \left| \det \left(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1 \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 10$

3) Ass $\overline{AB}$: $\overrightarrow{AB} \cdot X = \frac{B^2 - A^2}{2}$. Nel nostro caso,

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_1^2 = 2$, $P_2^2 = 10$, $P_3^2 = 26$.

Ass $\overline{P_1P_2}$: $\boxed{x + 2y = 2}$. Ass $\overline{P_1P_3}$: $\boxed{3x + y = 6}$. Ass $\overline{P_2P_3}$: $\boxed{2x - y = 4}$

4) C: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \boxed{C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

5) raggio $r = \| C - P_1 \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}$. $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{10} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mid \forall \theta \in [0, 2\pi) \right\}$: $(x-2)^2 + y^2 = 10$.

6) $Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. r_1 ha pendenza $m = \frac{1}{3}$.

$P_4 = P_1 + Q_{\frac{1}{3}} (P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{10} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il piano e le due rette*

$$\pi : x - y + z = 1, \quad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di π ed r senza cambiare la loro forma.*
3. *(1 punto) Trovare i punti $P_1 = \pi \cap r$, $P_2 = \pi \cap s$ e $P_3 = r \cap s$.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo $P = P_1P_2P_3$.*
5. *(1 punto) Calcolare il perimetro del triangolo $P = P_1P_2P_3$.*
6. *(1 punto) Sia $v_1 = \overrightarrow{P_3P_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_3P_2}$. Calcolare $v = v_1 \wedge v_2$ e considerare la retta $t = P_3 + \langle v \rangle$. Calcolare il punto $P_4 = t \cap \pi$.*
7. *(1punto) Ricordando che il volume di un tetraedro è dato dalla terza parte dell'area di una faccia per la sua altezza, calcolare il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$.*

Sol.: 1) r ed s si intersecano in un punto. Infatti,

$$\begin{cases} (1+t) - (-6+4t) = 1 \\ -4 + 3t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 7 - 3t = 1 \\ 3t = 6 \end{cases} \iff t = 2. \quad r \cap s = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) π ed r si intersecano in un punto. Infatti,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \pi \cap r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3) $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$. Infatti, P_1 e P_3 li abbiamo già calcolati e P_2 lo calcoliamo come segue

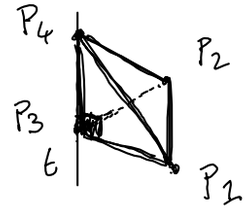
$$(1+t) - (-4+3t) + (-6+4t) = 1 \iff 2t = 2 \iff t = 1.$$

4) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} \| = \frac{1}{2} \| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \frac{3}{2} \| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \frac{3}{2} \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

5) $\| \overrightarrow{P_1P_2} \| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \| = 3\sqrt{2}$, $\| \overrightarrow{P_1P_3} \| = \| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2}$, $\| \overrightarrow{P_2P_3} \| = \| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \| = \sqrt{26} \Rightarrow \text{Perimetro} = 4\sqrt{2} + \sqrt{26}$

6) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. $t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. $P_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7) Il Tetraedro è ~~rettangolo~~ in P_3 poiché $t \perp P_1P_2P_3$.



$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area}(T) \| \overrightarrow{P_3P_4} \| = \frac{1}{3} \frac{3}{2}\sqrt{3} \| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \| = 3$$

Esercizio 3. *Si considerino i vettori* $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ *e la matrice* $A = vw^t$.

1. *(1 punto) Calcolare la matrice* A.
2. *(1 punto) Calcolare una base di* $\mathrm{Col}(A)$.
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
5. *(1 punto) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
6. *(1 punto) Dimostrare la seguente formula, nota come* formula di Sarrus

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

7. *(1 punto) Per* $n \geq 2$, *siano* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *due vettori non-nulli e tali che* $v \cdot w = 0$. *Dimostrare che la matrice* $A = vw^t$ *non è diagonalizzabile.*

Sol.: 1) $A = (v|v|-v) = \begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\3&3&-3\end{pmatrix}$ 2) $\mathcal{B}_{\mathrm{Col}A} = (v)$.

3) $\mathrm{Ker}A = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid vw^tX = 0\} \overset{v \neq 0_{\mathbb{R}^3}}{=} \{X \in \mathbb{R}^3 \mid w \cdot X = 0\} = w^\perp : x+y-z=0$. $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}A} = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

4) $P_A(x) = \det\begin{pmatrix}x-1&-1&1\\-2&x-2&2\\-3&-3&x+3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}x&-1&1\\-x&x-2&2\\0&-3&x+3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}x&-1&1\\0&x-3&3\\0&-3&x+3\end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix}x-3&3\\-3&x+3\end{pmatrix}$

$= x\det\begin{pmatrix}x&3\\x&x+3\end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix}x&3\\0&x\end{pmatrix} = x^3$. $P_A(x) = x^3$

5) $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. $ma_A(0) = 3$. $mg_A(0) = \dim\mathrm{Ker}A = 2 < ma_A(0)$

$\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

6) $\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} \overset{\text{Laplace } 1^\circ \text{ riga}}{=} a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

7) $\mathrm{Sp}(A) \overset{v \neq 0}{=} \{0\}$. $V_A(0) = \mathrm{Ker}A = w^\perp$. $\dim\mathrm{Ker}A = mg_A(0) \overset{w \neq 0}{\geq} n-1 < ma_A(0)$

$v \in w^\perp \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi vettoriali $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ *e* $W = \langle w_1, w_2 \rangle$*.*

1. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane di* U*.*
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$*.*
3. *(2 punti) Calcolare la matrice* A *associata a* pr_U^W *nella base standard di* $\mathbb{R}^4$*.*
4. *(1 punto) Calcolare* $\mathrm{pr}_U^W(P)$*.*
5. *(1 punto) Calcolare la matrice* A' *associata a* pr_W^U *nella base standard di* $\mathbb{R}^4$*.*
6. *(1 punto) Dimostrare che* $AA' = A'A = 0_{4\times 4}$ *è la matrice nulla.*

Sol: 1) $\ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

U: $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$.

2) $w_1 \notin U$ e $w_2 \notin U$, quindi $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Dalla formula di Grassmann $\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 4$ e quindi $U + W = \mathbb{R}^4$.

3) $\mathcal{B} = (u_1, u_2, w_1, w_2)$ è una base di $\mathbb{R}^4$. La matrice associata a pr_U^W in $\mathcal{B}$ è $C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^4 & = & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_U^W} & \mathbb{R}^4 & = & \mathbb{R}^4 \\ \downarrow \mathcal{E} & & \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{E} \\ \mathbb{R}^4 & \xleftarrow{B} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

$A = BCB^{-1}$, dove $B = (u_1 | u_2 | w_1 | w_2)$. Calcoliamo B^{-1} con l'algoritmo di inversione e otteniamo $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 10 & 3 & -5 \\ 1 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 & 0 \\ -3 & 13 & 4 & -5 \\ 9 & -36 & -11 & 15 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\mathrm{pr}_U^W(P) = AP = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = u_1 + u_2$

5) $A' = \mathbb{1}_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -12 & -4 & -15 \\ -9 & 36 & 12 & -15 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\mathrm{pr}_U^W \circ \mathrm{pr}_W^U = 0_{\mathbb{R}^4} = \mathrm{pr}_W^U \circ \mathrm{pr}_U^W$.

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
4. *(2 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonali tali che $B^tAB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{-1}.*
6. *(1 punto) Sia $n \geq 2$ e siano A e B due matrici simmetriche $n \times n$ tali che $AB = BA$. Dimostrare che la matrice AB è ortogonalmente diagonalizzabile.*

1) Poiché $A = A^t$, per il teorema spettrale A è ortogonalmente diagonalizzabile.

2) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)^3(x+2)$

3) $Sp(A) = \{-2, 2\}$.

4) $V_2(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$F_1 = b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_2' = b_3 - \frac{b_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_3' = b_4 - \frac{b_4 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{b_4 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \end{pmatrix}$

$V_{-2}(A) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow E_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$B = (E_1 | E_2 | E_3 | E_4) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(2, 2, 2, -2)$.

5) $D^2 = 4\,\mathbb{1}_4 \Rightarrow A^2 = (BDB^t)^2 = BD^2B^t = 4\,\mathbb{1}_4 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A$

6) $(AB)^t = B^tA^t = BA = AB \Rightarrow AB$ è ort. diag. per il Teo spettrale.