IL DETERMINANTE

Fissiamo $n \geq 1$ e consideriamo una funzione $f: Mat_{n\times n} \to \mathbb{K}$

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = abcd$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - c$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Quindi, f è una funzione di n^2 variabili.

Possiamo considerare f come una funzione delle <u>righe</u>

$$f: \underbrace{Mat_{1\times n} \times Mat_{1\times n} \times \dots \times Mat_{1\times n}}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

oppure come funzione delle colonne

$$f: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

Es: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f((a,b),(c,d))$

$= f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$

Definizioni:

Sia V uno spazio vettoriale, ad esempio $V = Mat_{1\times m}(\mathbb{K})$ o $V = \mathbb{K}^n$, Sia $n \geq 1$.

Una funzione $f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \to \mathbb{K}$ di n variabili vettoriali si dice

- <u>multilineare</u> se $\forall i = 1, \dots, n$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v, w \in V$

$$f(v_1, \dots, \underset{\uparrow i}{\alpha v + \beta w}, \dots, v_n) = \alpha f(v_1, \dots, \underset{\downarrow i}{v}, \dots, v_n) + \beta f(v_1, \dots, \underset{\uparrow i}{w}, \dots, v_n)$$

- <u>alternante</u> se

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0 \quad \text{se } v_i = v_j.$$

Queste sono definizioni che riguardano uno spazio vettoriale V qualunque.
Se ci concentriamo al caso di funzioni di matrici otteniamo:

Def: Sia $n \geq 1$ e $f : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

- f si dice *multilineare sulle righe* se f è multilineare come funzione delle righe
- f si dice *alternante sulle righe* se f è alternante come funzione delle righe
- f si dice *multilineare sulle colonne* se f è multilineare come funzione delle colonne
- f si dice *alternante sulle colonne* se f è alternante come funzione delle colonne

Esempi: $f: Mat_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

1. $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$
2. $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-c$
3. $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-b$
4. $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$

F.ne	Multilineare righe	Alternante righe	Multilineare colonne	Alternante colonne
1	NO	NO	NO	NO
2	NO	si	NO	NO
3	NO	NO	NO	si
4	SI	SI	SI	SI

Adesso vogliamo caratterizzare queste funzioni in termini delle matrici elementari. Abbiamo bisogno di due lemmi generali:

Lemma 1: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $n \geq 1$ un intero. Sia

$$f: V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

una funzione che cambia segno quando si scambiano due variabili, ovvero

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

per ogni $i \neq j$.

Allora f è alternante.

dim:

$$f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n)$$

Quindi

$$f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0. \qquad \blacksquare$$

oss: Il viceversa è **falso**. Ad esempio

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-c)b$ è alternante sulle righe

perché $f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0b = 0$ ma

$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ e $f\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq -1$.

Lemma 2: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $n \geq 1$ un intero. Sia

$$f: V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

una funzione multilineare.
Allora f è alternante se e solo se f cambia segno se si scambiano due variabili.

dim: Se f è alternante siano $i \neq j$ due indici. Allora

$$\begin{aligned}
0 &= f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) \\
&= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) = \\
&= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)
\end{aligned}$$

∎

Prop: Sia $f : Mat_{n\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

f è multilineare e alternante sulle righe

$\Updownarrow$

(R1) $f(P_{ij}A) = -f(A)$

(R2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A)$

(R3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A)$

$\forall i,j$, $\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda, c \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

dim:

$\Downarrow$) Se f è multilineare e alternante sulle righe allora f cambia segno se si scambiano due righe per il lemma 2, quindi vale (R1).

(R2) vale per la linearità nella i-esima riga. (R3) vale perché

$$f(F_{ij}(c)A) = f\left(A\right) + c\, f\left(\begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}\right) = f(A).$$

queste righe sono uguali!

⇑)

Lemma 1: Se f ha la proprietà (R2) allora $f(A)=0$ se A ha una riga nulla

dim: Sia $A_i = 0_{1\times m}$. Allora

$$f(A) = f(A_1,\dots,A_{i-1},0,A_i,\dots,A_n) = f(D_i(-1)A)$$

$$\underset{(R2)}{=} -f(A) \quad \Rightarrow f(A)=0. \qquad \blacksquare$$

Lemma 2: Se f ha le proprietà (R1), (R2) e (R3) allora $f(A)=0$ se le righe di A sono Lin. Dip.

dim: $x_1A_1+\dots+x_nA_n=0_n$. Sia i t.c. $x_i\neq 0$.

allora $A_i = -\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i} x_jA_j$

$$f(A) = f\left(A_1,\dots,A_{i-1},-\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}x_jA_j,A_{i+1},\dots,A_n\right)$$

$$= f\left(D_i\left(-\frac{1}{x_i}\right)\left(A_1,\dots,A_{i-1},\sum_{j\neq i}x_jA_j,\dots,A_n\right)\right)$$

$$\underset{(R2)}{=} -\frac{1}{x_i} f\left(A_1,\dots,A_{i-1},\sum_{j\neq i}x_jA_j,A_{i+1},\dots,A_n\right)$$

$$\underset{(R3)}{=} -\frac{1}{x_i} f\left(F_{i1}(-x_1)F_{i2}(-x_2)\cdots F_{in}(-x_n)\left(A_1,\dots,\textstyle\sum x_jA_j,\dots,A_n\right)\right)$$

$$\underset{(R3)}{=} -\frac{1}{x_i} f(A_1,\dots,A_{i-1},0,A_{i+1},\dots,A_n) \underset{\text{Lemma 1}}{=} 0$$

$\blacksquare$

Se vale (R1) allora f è alternante sulle righe per il lemma 1. Facciamo vedere che (R2)+(R3) implicano che f è multilineare sulle righe:

Dimostriamo quindi che

$$f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha B+\beta C \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ C \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

($B+C$, B e C si trovano sulla stessa riga i).
Usando (R1) e (R2) possiamo assumere che $i=1$. Quindi dimostriamo che

$$f\begin{pmatrix} \alpha B+\beta C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Se $A_2, \dots, A_n$ sono lin. Dip., allora $f\begin{pmatrix} X \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 \quad \forall X$ per il lemma 2 quindi vale (*). Supponiamo che $A_2, \dots, A_n$ siano lin. ind.. Estendiamo ad una base $A_1, A_2, \dots, A_n$ di $Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$. Sia $X \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$. Allora $\exists\, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ t.c. $X = y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_n A_n$.

Allora

$$f\begin{pmatrix} X \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_m A_n \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \overset{(R3)}{=}$$

$$= f\begin{pmatrix} y_1 A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{(R2)}{=} y_1 f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Prendiamo due vettori arbitrari

$B = y_1 A_1 + \dots + y_m A_n$ e $C = z_1 A_1 + \dots + z_n A_n$

Allora per (**)

$$f\begin{pmatrix} \alpha B + \beta C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = (\alpha y_1 + \beta z_1) f\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha f\begin{pmatrix} y_1 A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} z_1 A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Prop: Sia $g: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

g è multilineare e alternante sulle colonne

$\Updownarrow$

(C1) $g(AP_{ij}) = -g(A)$

(C2) $g(A\,D_i(\lambda)) = \lambda\, g(A)$

(C3) $g(A\,F_{ji}(c)) = g(A)$

$\forall\, i,j$, $\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda, c \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

dim: Consideriamo la funzione

$f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ definita come

$$f(A) := g(A^t).$$

È facile vedere (Esercizio!) che g soddisfa (C1), (C2) e (C3) se e solo se f soddisfa (R1), (R2) e (R3). Per la proposizione precedente questo è equivalente a dire che f è multilineare ed alternante sulle righe. Rimane da dimostrare

che se g è multilineare e alternante sulle colonne allora f è multilineare e alternante sulle righe: si ha

$$\cdot) \; f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = g\left(A_1^t, \dots, v^t, \dots, v^t, \dots, A_n^t\right) = 0$$

$$\cdot) \; f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A + \beta B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = g\left(A_1^t, \dots, (\alpha A + \beta B)^t, \dots, A_n^t\right) =$$

$$= g\left(A_1^t, \dots, \alpha A^t + \beta B^t, \dots, A_n^t\right) =$$

$$= \alpha\, g\left(A_1^t, \dots, A^t, \dots, A_n^t\right) + \beta\, g\left(A_1^t, \dots, B^t, \dots, A_n^t\right)$$

$$= \alpha f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

∎

Teorema / Definizione

Esiste un'unica funzione $f: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(D1) f è alternante sulle righe

(D2) f è multilineare sulle righe

(D3) $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Tale funzione si chiama <u>determinante</u> e si denota con $\det$.

<u>dim</u>:

Per la proposizione le condizioni (D1) e (D2) sono equivalenti a (R1), (R2), (R3).

Dimostriamo che esiste una funzione con queste proprietà esibendone una:

Per ogni $n \geq 1$ definiamo una funzione $d^{(n)} : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ "induttivamente".

Per farlo abbiamo bisogno della seguente notazione

Notazione: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sia $k \in \{1, \dots, n\}$ un indice di riga. Denotiamo con A_{k1} la matrice ottenuta da A rimuovendo la riga k e la colonna 1.

Es:

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A_{11} = (d) \quad A_{21} = (b)$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Def: Per ogni $n \geq 1$ definiamo la f.ne

$$d^{(n)} : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

come segue

$d^{(1)} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ è l'identità

e per $n \geq 2$

$$d^{(n)}(A) = a_{11}\, d^{(n-1)}(A_{11}) - a_{21}\, d^{(n-1)}(A_{2,1}) + a_{31}\, d^{(n-1)}(A_{3,1}) - a_{41}\, d^{(n-1)}(A_{4,1}) + \cdots$$

$$= \sum_{K=1}^{n} (-1)^{K+1} a_{K1}\, d^{(n-1)}(A_{K,1})$$

Es:

$$d^{(1)}((2)) = 2$$

$$d^{(2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - cb$$

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = d^{(2)}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -12 + 12 + 0 = 0$$

(osserviamo che la seconda riga è il doppio della prima)

Teorema (Esistenza del determinante)

Per ogni $n \geq 1$, la funzione

$$d^{(n)} : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

è multilineare sulle righe, alternante sulle righe e $d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$.

dim:

Per $n=1$, $d^{(1)}$ è l'identità quindi ha le proprietà richieste.

Supponiamo che $d^{(n-1)}$ abbia le proprietà richieste e dimostriamo che allora anche $d^{(n)}$ le ha.

(R1) Siano $1 \leq i < j \leq n$ due indici di riga. Facciamo vedere che

$$d^{(n)}(P_{ij}A) = -d^{(n)}(A)$$

per qualunque matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$$d^{(n)}(P_{ij}A) = \sum_{K=1}^{i-1} (-1)^{K+1} a_{K1}\, d^{(n-1)}\left((P_{ij}A)_{K,1}\right) +$$

$$+ (-1)^{i+1} a_{j1}\, d^{(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_{i-1} \\ \bar{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_i \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j-1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$+ \sum_{K=i+1}^{j-1} (-1)^{K+1} a_{K1}\, d^{(n-1)}\left(P_{i,j-1} A_{K,1}\right) +$$

$$+ (-1)^{j+1} a_{i1}\, d^{(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_j \\ \vdots \\ \bar{A}_{j-1} \\ \bar{A}_{j+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$+ \sum_{K=j+1}^{n} (-1)^{K+1} a_{K,1}\, d^{(n-1)}\left((P_{ij}A)_{K,1}\right)$$

dove

$\bar{A}_K = (a_{K2}, \dots, a_{Kn})$ "A_K senza la 1ª colonna".

Occupiamoci del sommando i-esimo:

$$S_i := (-1)^{i+1} a_{j1} \, d^{(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_{i-1} \\ \bar{A}_{i+1} \leftarrow \text{riga } i \\ \vdots \\ \bar{A}_i \leftarrow \text{riga } j-1 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$$

Dobbiamo "portare" A_i nella riga i lasciando la posizione reciproca delle altre righe invariata:

scambiamo la riga $j-1$ con la riga $j-2$

poi

scambiamo la riga $j-2$ con la riga $j-3$

e così via fino a

scambiare la riga $i+1$ con la riga i

Quanti scambi abbiamo fatto?

Risposta: $(j-1)-i$

Alla fine di questo procedimento otteniamo $A_{j,1}$. Quindi

$$S_i = (-1)^{i+1}(-1)^{j-i-1} a_{j1}\, d^{(n-1)}(A_{j,1}) =$$

$$= -(-1)^{j+1} a_{j1}\, d^{(n-1)}(A_{j,1}).$$

Similmente, il sommando j-esimo

$$S_j = -(-1)^{i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_j \\ \vdots \\ \bar{A}_{j-1} \\ \bar{A}_{j+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$$

riga i

riga $j-1$

riga j

è uguale a

$$S_j = (-1)^{j+1}(-1)^{j-i} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

$$= (-1)^{2j-i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

$$= (-1)^{-i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1}) =$$

$$= -(-1)^{i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

Gli altri sommandi si analizzano facilmente ed usando la proprietà (R1) per $d^{(n-1)}$ otteniamo

$$d^{(n)}(P_{ij}A) = -d^{(n)}(A).$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$d^{(3)}(P_{12}A) = 4d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - d^{(2)}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7d^{(2)}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\left[d^{(2)}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -d^{(3)}(A).$$

Dimostriamo adesso che $d^{(n)}$ è multilineare sulle righe:

Sia $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice $n \times n$ e supponiamo che una riga di A sia una combinazione lineare di due matrici riga, diciamo

$$A_i = \alpha A_i' + \beta A_i''$$

per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A_i', A_i'' \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$.

Dimostriamo che

$$d^{(n)}(A) = \alpha\, d^{(n)}(A') + \beta\, d^{(n)}(A'')$$

dove

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i, \quad A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Ad esempio

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2\, d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$d^{(n)}(A) = \sum_{k \neq i} (-1)^{k+1} a_{k1}\, d^{(n-1)}(A_{k,1}) +$$

$$+ (-1)^{i+1} (\alpha a'_{k1} + \beta a''_{k1})\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

Osserviamo che $A_{k,1}$, se $k \neq i$, ha una riga che è ottenuta da $\alpha A'_i + \beta A''_i$ Togliendo la prima colonna. Quindi, dato che $d^{(n-1)}$ è lineare in questa riga, otteniamo

$$d^{(n-1)}(A_{k,1}) = \alpha\, d^{(n-1)}(A'_{k1}) + \beta\, d^{(n-1)}(A''_{k,1}).$$

Sostituendo, otteniamo

$$d^{(n)}(A) = \sum_{k \neq i} (-1)^{k+1} a_{k1} \left[\alpha d^{(n-1)}(A') + \beta d^{(n-1)}(A'')\right]$$

$$+ (-1)^{i+1} (\alpha a'_{i1} + \beta a''_{i1})\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a'_{k1}\, d^{(n-1)}(A'_{k1}) + \beta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a''_{k1} d^{(n-1)}(A''_{k1})$$

$$= \alpha\, d^{(n)}(A') + \beta\, d^{(n)}(A'') \qquad \blacksquare$$

Dimostriamo adesso che

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$$

sapendo che $d^{(n-1)}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1$:

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (\mathbb{1}_n)^1_k \, d^{(n-1)}\left((\mathbb{1}_n)_{k1}\right)$$

Dato che $(\mathbb{1}_n)^1_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$

e che $(\mathbb{1}_n)_{1,1} = \mathbb{1}_{n-1}$ otteniamo

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = d^{(n-1)}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1.$$

Es:

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = d^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= d^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Teorema / Definizione

Esiste un'unica funzione $f: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(D1) f è alternante sulle righe

(D2) f è multilineare sulle righe

(D3) $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Tale funzione si chiama <u>determinante</u> e si denota con $\det$.

<u>dim</u>: Abbiamo già dimostrato che la funzione $d^{(n)}$ ha queste proprietà, per cui esiste almeno una tale funzione. f

Dimostriamo che f è unica.

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Consideriamo matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c. $E_k \cdots E_1 A = rref(A)$.

$\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} rref(A)$

$\Rightarrow f(A) = c\, f(rref(A))$ per un opportuno scalare c che dipende da $E_1, \dots, E_k$.

Per una matrice a scala ridotta U_0 quadrata ci sono 2 possibilità:

1) U_0 ha una riga nulla

2) $U_0 = \mathbb{1}_n$.

Quindi:

$$f(U_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } U_0 \text{ ha una riga nulla} \\ 1 & \text{se } U_0 = \mathbb{1}_n \end{cases}$$

Otteniamo:

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{rg} A < n \\ c & \text{se } \operatorname{rg} A = n \end{cases}$$

Quindi se f esiste è unica ☒

<u>Oss</u>: ·) $\det(D_i(\lambda)) = \det(D_i(\lambda)\mathbb{1}_n) = \lambda \det(\mathbb{1}_n) = \lambda$

·) $\det(F_{ij}(\lambda)) = \det(F_{ij}(\lambda)\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$

·) $\det(P_{ij}) = \det(P_{ij}\,\mathbb{1}_n) = -\det(\mathbb{1}_n) = -1$

In particolare, $\boxed{\det(EA) = \det E \det A}$ per ogni matrice elementare E.

Il motivo per cui siamo interessati al determinante è fondamentalmente il seguente:

COR: Data $A \in Mat_{n\times n}$:

$$\det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n \iff \operatorname{Ker} A = \{0\} \iff A \text{ invertibile}$$

Calcolare il determinante è computazionalmente complesso. Vediamo di sviluppare alcune tecniche di calcolo. La prima l'abbiamo già vista:

Calcolo del determinante mediante Gauss

Si tratta di ridurre una matrice a scala e calcolare la variazione del determinante ad ogni passaggio.

Vediamo qual'è il determinante di una matrice a scala, in maniera da ridurre il numero di passaggi:

Prop: Se A è una matrice quadrata $n \times n$ a scala allora

$$\boxed{\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \quad (*)$$

ovvero il determinante è il prodotto degli elementi diagonali.

dim: Sappiamo che $\operatorname{rg} A$ è uguale al numero di elementi diagonali non-nulli. Quindi, $\det A = 0 \iff \exists i : a_{ii} = 0$. In questo caso la formula $(*)$ diventa $0 = 0$.

Supponiamo che A sia invertibile, e quindi $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Possiamo dividere ogni riga di A per il corrispondente pivot ed ottenere una matrice U a scala che abbia 1 sulla diagonale principale:

$$A \rightsquigarrow D_1\left(\frac{1}{a_1}\right) D_2\left(\frac{1}{a_2}\right) \cdots D_n\left(\frac{1}{a_n}\right) A = U$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi,

$$A = D_1(a_1) D_2(a_2) \cdots D_n(a_n) U$$

ne segue

$$\det A = \det(D_1(a_1)) \det(D_2(a_2)) \cdots \det(D_n(a_n)) \det U$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \det U.$$

Rimane quindi da dimostrare che $\det U = 1$.

Questo segue dal fatto che

$$U \rightsquigarrow \mathbb{1}_n$$

Tramite operazioni elementari $F_{ij}(\lambda)$

che non cambiano il determinante

□

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -6$$

∎

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 7 - \frac{15}{2} = -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -1.$$

OSS: $\det D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) A = \frac{1}{\lambda} \det A$

$$\Rightarrow \det A = \lambda \cdot \det\left(D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) A\right)$$

Es: Calcolare il determinante della seguente matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 1 & i & 4-i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 1-i & i & 1+i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & -1 & -2+6i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & 1 & 2-6i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & 1 & 2-6i \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix} = 2+i$$

- **Oss:** $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Infatti, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det A = d^{(2)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def}}{=} a\, d^{(1)}(A_{11}) - c\, d^{(1)}(A_{21})$$

$$= a\, d^{(1)}(d) - c\, d^{(1)}(b)$$

$$= ad - bc.$$

∎

Es: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$

Per calcolare il determinante possiamo operare anche sulle <u>colonne</u>.
Vediamo perché.
Cominciamo con il seguente importante risultato:

Teorema (di Binet o del prodotto)

Date $A, B \in Mat_{n\times n}$ si ha

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

dim:

Sappiamo che AB è invertibile se e solo se A è invertibile e B è invertibile

Quindi $\det(AB) = 0 \iff \det A \det B = 0$.

ed il Teorema vale se AB non è invertibile.

Supponiamo quindi AB sia invertibile. Ovvero sia A che B sono invertibili.

Dimostriamo il teorema di Binet in due modi diversi, entrambi interessanti:

Dimostrazione 1: A e B sono prodotto di matrici elementari, quindi esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_k, F_1, \dots, F_t$ tali che $A = E_1 \cdots E_k$ e $B = F_1 \cdots F_t$.

Quindi:

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k F_1 \cdots F_t)$$

$$= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(F_1) \cdots \det(F_t)$$

$\det(EA) = \det E \det A$ $\forall E$ elementare e $\forall A$

$$= \det(E_1 \cdots E_k) \det(F_1 \cdots F_t)$$

$$= \det A \det B. \quad \blacksquare$$

Dimostrazione 2: Definiamo la funzione $f: \mathrm{Mat}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ come $f(A) = \dfrac{\det(AB)}{\det(B)}$.

È ben definita, poiché $\det B \neq 0$. Dimostriamo che $f(A) = \det(A)$:

(D1): $f(P_{ij}A) = \dfrac{\det(P_{ij}AB)}{\det B} = -\dfrac{\det(AB)}{\det B} = -f(A)$

(D2): $f(D_i(\lambda)A) = \dfrac{\det(D_i(\lambda)AB)}{\det B} = \lambda \dfrac{\det(AB)}{\det B} = \lambda f(A)$

$f(F_{ij}(\lambda)A) = f(A)$

(D3): $f(\mathbb{1}) = \dfrac{\det B}{\det B} = 1$. $\blacksquare$

COR1: $\det(AB) = \det(BA)$
(anche se $AB \neq BA$)

COR2: A invertibile $\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Il Teorema di Binet si può formulare dicendo che il determinante è moltiplicativo.

Nella dimostrazione del Teorema abbiamo usato la moltiplicatività del determinante sulle matrici elementari

$$\det(E_1 \cdots E_k) = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_k.$$

(Questo segue dalla definizione).

Vediamo un' altra importante conseguenza di questo:

Teorema: $\det(A^t) = \det(A)$

dim: Dimostriamo prima il teorema nel caso delle matrici elementari. Vediamo quindi qual'è la Trasposta di una matrice elementare:

1) $(P_{ij})^t = P_{ij}$
2) $(D_i(\lambda))^t = D_i(\lambda)$
3) $(F_{ij}(\lambda))^t = F_{ji}(\lambda)$

Da questo segue che $\det(E^t) = \det(E)$ per qualunque matrice elementare E.

Dimostriamo adesso il Teorema per una matrice quadrata qualunque A.

Dato che $\operatorname{rg} A^t = \operatorname{rg} A$, sappiamo che A è invertibile se e solo se A^t è invertibile.

Quindi, $\det A = 0 \iff \det A^t = 0$.

Supponiamo quindi che A e A^t siano invertibili. Allora A è

prodotto di matrici elementari

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

e quindi

$$A^t = E_k^t \cdots E_2^t E_1^t .$$

Dalla moltiplicatività del determinante sulle matrici elementari e dal fatto che $\det(E^t) = \det E$ per ogni matrice elementari, otteniamo:

$$\begin{aligned} \det A^t &= \det E_k^t \det E_{k-1}^t \cdots \det E_2^t \det E_1^t \\ &= \det E_k \det E_{k-1} \cdots \det E_2 \det E_1 \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{k-1} \det E_k \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_{k-1} E_k) = \det A. \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

∎

COR: Esiste un'unica funzione $g: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ che è alternante sulle colonne, multilineare sulle colonne e $g(\mathbb{1}_n)=1$. Tale funzione coincide con il determinante.

dim: Poniamo $g(A) := \det(A^t)$.

Allora:

- $g(AP_{ij}) = \det((AP_{ij})^t) = \det(P_{ij}A^t)$
$= -\det(A^t) = -g(A)$
- $g(AD_i(\lambda)) = \det((AD_i(\lambda))^t) = \det(D_i(\lambda)A^t)$
$= \lambda \det A^t = \lambda\, g(A)$

Se $B = (A^1|\dots|A^i+C|\dots|A^n)$ e $C^i(A,C) = (A^1|\dots|C|\dots|A^n)$ allora

$g(B) = \det(B^t) = \det(A^t) + \det(R_i(A,C))$
$= g(A) + \det(C^i(A,C)^t) = g(A) + g(C^i(A,C))$

- $g(\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n^t) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$

Quindi una tale g esiste.

Vediamo che è unica.

Se g è una tale funzione, allora definiamo $f: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(A) = g(A^t)$$

Allora f è alternante sulle righe, multi-lineare sulle righe e $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Quindi $f = det$. Allora

$$g(A) = f(A^t) = det(A^t) = det(A)$$

$\forall A \in Mat_{n\times n}$. Ne segue che $g = det$.

∎

Quindi possiamo operare sulle <u>colonne</u> per calcolare il determinante.

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -12$$

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= +\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

Def: ·) Una matrice *triangolare superiore* è una matrice quadrata a scala.

·) Una matrice *triangolare inferiore* è una matrice quadrata la cui trasposta è a scala

Es: $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Triangolare superiore

Triangolare inferiore.

·) Una matrice *Triangolare* è una matrice Triangolare superiore oppure Triangolare inferiore.

OSS: U triangolare $\Rightarrow$ $\det U$ = prodotto dei suoi elementi diagonali.

COR (del teorema di esistenza ed unicità)

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una sua base. Allora esiste un'unica funzione

$$f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n = \dim V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

multilineare, alternante e tale che

$$f(v_1, \dots, v_n) = 1.$$

dim:

Esistenza: Definiamo

$$\boxed{f(w_1, \dots, w_n) := \det\left(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t\right)} \quad (*)$$

Dimostriamo che questa funzione ha le proprietà richieste:

1) f è multilineare:

$$f(-, \alpha u + \beta w, -) = \det(-, F_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w)^t, -)$$

$F_{\mathcal{B}}$ e ^{t} sono lineari

$$= \det(-, \alpha F_{\mathcal{B}}(u)^t + \beta F_{\mathcal{B}}(w)^t, -)$$

$\det$ è multilineare

$$= \alpha \det(-, F_{\mathcal{B}}(u), -) + \beta \det(-, F_{\mathcal{B}}(w), -) =$$

$$= \alpha f(-, u, -) + \beta f(-, w, -).$$

2) f è alternante:

$$f(-, w, -, w, -) = \det(-, F_{\mathcal{B}}(w)^t, -, F_{\mathcal{B}}(w)^t, -)$$

$\det$ è alternante

$$\overset{\downarrow}{=} 0$$

3) $f(v_1, \dots, v_n) = \det(F_{\mathcal{B}}(v_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(v_n)^t)$

$$= \det(e_1^t, \dots, e_n^t)$$

$$= \det(\mathbb{1}_n) = 1$$

<u>Unicità</u>: Sia $g: V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$ una funzione multilineare, alternante e tale che $g(v_1, \dots, v_n) = 1$.

Definiamo $g': \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ come

$$g'(X_1, \dots, X_n) = g(F_{\mathcal{B}}^{-1}(X_1^t), \dots, F_{\mathcal{B}}^{-1}(X_n^t))$$

per ogni $X_1, \dots, X_n \in \mathrm{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K})$.

g' è multilineare e alternante poiché g lo è (Esercizio!). Inoltre

$$g'(\mathbb{1}_n) = g(v_1, \dots, v_n) = 1.$$

Quindi, per l'unicità del determinante,

$$g'(x_1, \dots, x_n) = \det(x_1, \dots, x_n).$$

Otteniamo, $\forall w_1, \dots, w_n \in V$,

$$\begin{aligned} g(w_1, \dots, w_n) &= g'(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t) \\ &= \det(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t) \\ &= f(w_1, \dots, w_n). \end{aligned}$$

□

<u>OSS</u>: La funzione f definita nel corollario si chiama determinante di V rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Vedremo come cambia questa funzione al variare della base $\mathcal{B}$.

Vediamo adesso un'interessante applicazione geometrica di questo corollario:

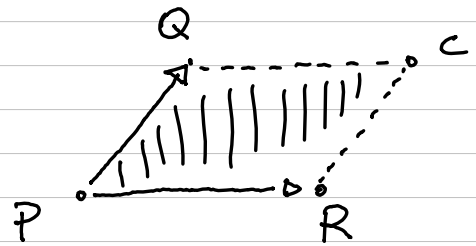
Il determinante 2×2 come area orientata

Sia $V = V_0^2 = \{\vec{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2\}$ lo spazio vettoriale reale dei vettori geometrici del piano.

Dati due vettori geometrici applicati ad uno stesso punto P, diciamo

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ e $\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP}$

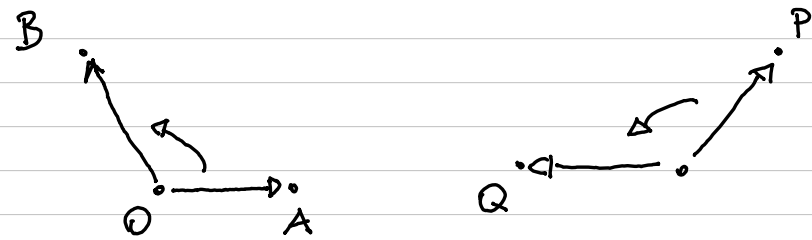
il parallelogramma da essi generato lo denotiamo con $\mathcal{P}(\vec{PQ}, \vec{PR})$



$= \mathcal{P}(\vec{PQ}, \vec{PR})$

(C è l'unico punto t.c. $\vec{PC} = \vec{PQ} + \vec{PR}$)

Def: Due coppie ordinate di vettori geometrici $(\vec{OA}, \vec{OB})$ e $(\vec{OC}, \vec{OD})$ non allineati (quindi due basi di V_0^2) si dicono **concordi** se l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ compreso tra i due vettori viene spazzato nello stesso verso (orario o anti-orario) da $\vec{OA}$ a $\vec{OB}$ e da $\vec{OC}$ a $\vec{OD}$. altrimenti si dicono **discordi**



concordi



discordi

Teorema (det 2x2 come area orientata)

Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria di V_0^2.

Dati due vettori geometrici $\vec{OP}, \vec{OQ}$ si ha

$$\text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})\right) = \left|\det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)\right|$$

dim: Consideriamo la seguente funzione

$$\mathcal{A} : V_0^2 \times V_0^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita come

$$\mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ}) = \begin{cases} \text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})\right) & \text{se } (\vec{OP}, \vec{OQ}) \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono concordi} \\ -\text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})\right) & \text{se } (\vec{OP}, \vec{OQ}) \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono discordi} \\ 0 & \text{se } \vec{OP} \text{ e } \vec{OQ} \text{ sono allineati} \end{cases}$$

Dimostriamo che $\mathcal{A}$ è multilineare, alternante e vale 1 su $\mathcal{B}$. Una volta dimostrato questo, il Teorema precedente ci assicura che

$$\mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ}) = \det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)$$

e quindi conclude la dimostrazione.

A è multilineare e alternante:

lo stesso argomento usato nel caso $V = Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ ci assicura (Esercizio!) che basta far vedere

1) $A(\vec{OP}, \vec{OQ}) = -A(\vec{OQ}, \vec{OP})$

2) $A(\lambda \vec{OP}, \vec{OQ}) = \lambda A(\vec{OP}, \vec{OQ})$

3) $A(\vec{OP_1} + \vec{OP_2}, \vec{OQ}) = A(\vec{OP_1}, \vec{OQ}) + A(\vec{OP_2}, \vec{OQ})$

$\forall \vec{OP}, \vec{OQ} \in V_0^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Se $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ sono allineati queste tre uguaglianze sono trivialmente vere.

Assumiamo quindi che $(\vec{OP}, \vec{OQ})$ sia una base di V_0^2. Osserviamo che se $(\vec{OP}, \vec{OQ})$ è concorde con $\mathcal{B}$ allora $(\vec{OQ}, \vec{OP})$ è discorde con $\mathcal{B}$. Quindi 1) vale.

Supponiamo da adesso in poi che $(\vec{OP}, \vec{OQ})$ sia <u>concorde</u> con $\mathcal{B}$.

2) Sia $\lambda > 0$. Allora $(\lambda \vec{OP}, \vec{OQ})$ è ancora concorde con $\mathcal{B}$. Quindi, per definizione,

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ}) = \text{Area } \mathcal{P}(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ}) =$$

Area $\mathcal{P}$ = base x altezza $\rightarrow$ $= \lambda \text{ Area } \mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})$

$$= \lambda\, \mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ}).$$

Se $\lambda < 0$, allora $(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ})$ è discorde con $\mathcal{B}$

quindi

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ}) = -\text{Area}\,(\mathcal{P}(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ}))$$

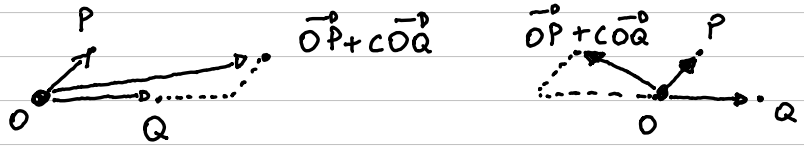
Area $\mathcal{P}$ = base x altezza $\rightarrow$ $= -|\lambda| \text{ Area } \mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})$

base $= |\lambda|\,|\vec{OP}|$ $= -|\lambda|\, \mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ})$

$$= \lambda\, \mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ}).$$

3) Sia $c \in \mathbb{R}$. Se $c = 0$ non c'è niente da dimostrare.

Supponiamo $c \neq 0$.



Se $c > 0$ Se $c < 0$

Notiamo che $(\vec{OP}+c\vec{OQ}, \vec{OQ})$ è concorde con $\mathcal{B}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Inoltre l'altezza di $\mathcal{P}(\vec{OP}+c\vec{OQ}, \vec{OQ})$ relativa alla base $\vec{OQ}$ è uguale all'altezza di $\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})$ relativa a $\vec{OQ}$. Concludiamo che vale 3. ∎

Oss: Se $\mathcal{B}$ non è unitaria, ovvero se in qualche unità di misura Area $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = a$ allora

$$\text{Area } \mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ}) = a \left| \det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)\right|$$

Infatti, in questo caso la funzione $\frac{1}{a} A$ è multilineare, alternante e vale 1 su $\mathcal{B}$.

Quindi $\frac{1}{a} A(\vec{OP}, \vec{OQ}) = \det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)$.

Aver richiesto che $\mathcal{B}$ è unitaria è quindi privo di sostanziale importanza.

Es: Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria.

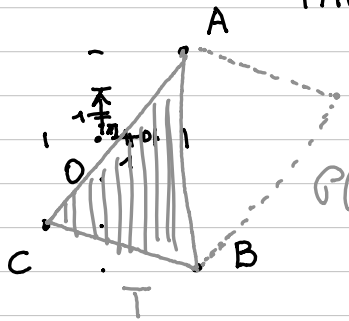
Siano $A, B, C \in \mathcal{E}^2$ tre punti del piano t.c.

$F_{\mathcal{B}}(\vec{OA}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F_{\mathcal{B}}(\vec{OB}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $F_{\mathcal{B}}(\vec{OC}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C.

Sol.: Sia T il triangolo di vertici A, B, C.

Allora



$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \text{Area } \mathcal{P}(\vec{CA}, \vec{CB})$$

Per il teorema

$$\text{Area } \mathcal{P}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \left| \det \left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OA} - \vec{OC})^t, F_{\mathcal{B}}(\vec{OB} - \vec{OC})^t \right) \right|$$

($\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC}$, $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$)

$$= \left| \det \left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OA})^t - F_{\mathcal{B}}(\vec{OC})^t, F_{\mathcal{B}}(\vec{OB})^t - F_{\mathcal{B}}(\vec{OC})^t \right) \right|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right| = |-3-12| = 15$$

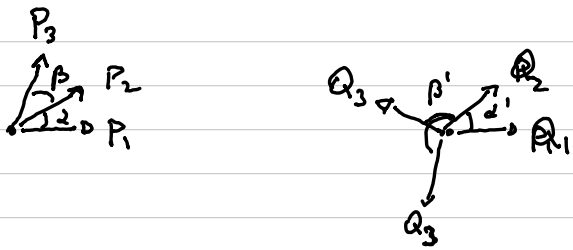
$$\Rightarrow \text{Area}(T) = \frac{15}{2}.$$

Il determinante 3x3 come volume orientato

Def: Due basi $\mathcal{B}_1 = (\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3})$ e $\mathcal{B}_2 = (\vec{OQ_1}, \vec{OQ_2}, \vec{OQ_3})$ si dicono <u>equiverse</u> se

$\cos(\vec{OP_1}, \vec{OP_2})$ ha lo stesso segno di $\cos(\vec{OQ_1}, \vec{OQ_2})$

$\cos(\vec{OP_2}, \vec{OP_3})$ ha lo stesso segno di $\cos(\vec{OQ_2}, \vec{OQ_3})$



Sviluppi di Laplace del determinante

Abbiamo visto che per calcolare il determinante di una matrice quadrata possiamo operare sulle righe o sulle colonne per ridurre la matrice ad una matrice Triangolare il cui determinante è semplicemente il prodotto degli elementi diagonali.

Vediamo adesso un' altra Tecnica: calcoliamo il determinante di una matrice $n \times n$, riducendoci a calcolare il determinante di matrici $(n-1) \times (n-1)$.

Def: Data $A \in Mat_{n \times n}$ ed una coppia (i,j) definiamo $A_{ij} \in Mat_{(n-1) \times (n-1)}$ come la sottomatrice di A ottenuta rimuovendo la riga i-esima e la colonna j-esima.

Es:

•) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = d \quad A_{12} = c$

$A_{21} = b \quad A_{22} = a$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

TEOREMA (Sviluppi di Laplace)

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$

1) Dato un indice di riga $i \in \{1,\dots,n\}$ si ha

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

("Sviluppo del determinante lungo la riga i")

2) Dato un indice di colonna $j \in \{1,\dots,n\}$ si ha

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

("Sviluppo del determinante lungo la colonna j")

dim: 1) Siano $\hat{e}_1 = e_1^t, \dots, \hat{e}_n = e_n^t$ le righe di $\mathbb{1}_n$, ovvero

$$\hat{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow i}{1}, 0, \dots, 0)$$

Allora la i-esima riga di A è

$$A_i = a_{i1}\hat{e}_1 + a_{i2}\hat{e}_2 + \dots + a_{in}\hat{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{e}_j$$

Dalla linearità del determinante nella i-esima riga otteniamo

$$\det(A) = \det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right)$$

Rimane, quindi, da dimostrare che

$$\det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Si ha:

$$\det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1j} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{nj} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Scambiando successivamente la riga i-esima con le righe immediatamente sopra otteniamo

$$= (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Scambiando successivamente la colonna j-esima con le colonne immediatamente a sinistra otteniamo

$$= (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$$

$$= (-1)^{i+j} \det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_{ij} \end{array}\right)$$

Rimane da dimostrare $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = \det A_{ij}$.

Ovviamente,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A_{ij}) + 1$$

(perché?), quindi

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = 0 \iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} < n$$

$$\iff \operatorname{rg}(A_{ij}) < n-1 \iff \det A_{ij} = 0$$

Supponiamo quindi che A_{ij} sia invertibile. Allora esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c.

$$A_{ij} = E_1 \cdots E_k .$$

Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix}$$

Dimostriamo che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det E$$

per ogni matrice elementare E:

- Notiamo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ è ancora una matrice elementare dello dello stesso Tipo di E:

.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{ij} \end{pmatrix} = P_{i+1,j+1}$

.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_i(\lambda) \end{pmatrix} = D_{i+1}(\lambda)$

.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_{ij}(\lambda) \end{pmatrix} = F_{i+1,j+1}(\lambda)$

Quindi $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det E$. Ne segue:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \cdots \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix}$$

$$= \det E_1 \cdots \det E_k$$

$$= \det (E_1 \cdots E_k) = \det A_{ij}.$$

come volevasi dimostrare $\square$

2) Dimostriamo che dato un indice di colonna j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Si ha:

$$\det(A) = \det(A^t) = \overset{\text{sviluppo sulla } j\text{-esima riga}}{\overset{\downarrow}{}}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det\left((A^t)_{ji}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$\blacksquare$

$(A^t)_{ji} = (A_{ij})^t$

$\det(A_{ij})^t = \det A_{ij}$

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Es: Calcolare il determinante della seguente matrice, usando lo sviluppo lungo la 2ª riga e lungo la 3ª colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol.: Sviluppo lungo la seconda riga

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ 1(-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(-2-3) - (-1-6) + (1-4) = 5+7-3 = 9$$

Sviluppo lungo la 3ª colonna

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3(1+2) + (1-4) - (-1-2) = 9 - 3 + 3 = 9$$

Per calcolare il determinante:

-) Usare le operazioni elementari sulle righe o sulle colonne per creare una riga od una colonna contenente molti zero.
-) Usare lo sviluppo di Laplace lungo tale riga o tale colonna.

· Es:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & 2 \\ -4 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = (-2) \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \det\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = (-2)(-8+10) = -4$$

□

oss: Il determinante è l'unica funzione $\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che

1) $\det(P_{ij}A) = -\det(A)$, 2) $\det(D_i(\lambda)A) = \lambda \det(A)$,

3) $\det(F_{ij}(c)A) = \det(A)$.

Abbiamo visto che una tale funzione può essere calcolata con gli sviluppi di Laplace.

Se una funzione $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è multilineare sulle righe alternante sulle righe allora f ha le proprietà 1), 2), 3).

Se inoltre $f(\mathbb{1}_n) = 1$ allora $f = \det$, per l'unicità.

Facciamo vedere che $\det$ è multilineare sulle righe:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \\ B \end{pmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} \det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_i & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} \det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_i+B & 1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + (-1)^{i+n+1} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + (-1)^{\cancel{i}+n+1+n-\cancel{i}} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa mediante det

Def: Dato $n \geq 1$ ed una matrice quadrata $A \in Mat_{n\times n}$ e dati un indice di riga i ed un indice di colonna j, il <u>cofattore</u> (i,j) di A è il numero

$$C_{ij} = C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Quindi, C_{ij} ha lo stesso segno di $\det A_{ij}$ se $i+j$ è pari ed ha segno opposto se $i+j$ è dispari. I segni sono quindi

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere gli sviluppi di Laplace usando questa notazione:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Def: La <u>matrice aggiunta ad A</u> è la matrice $\mathrm{Agg}(A)$ che ha come componenti i cofattori di A

$$\mathrm{Agg}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$C_{11}(A) = d$, $C_{12}(A) = -c$, $C_{21}(A) = -c$, $C_{22}(A) = a$

$$\mathrm{Agg}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Agg}(A)^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\,\mathrm{Agg}(A)^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= \det(A)\,\mathbb{1}_2.$$

TEOREMA

Sia $A \in Mat_{n\times n}$. Allora

$$\boxed{A\, Agg(A)^t = \det A\, \mathbb{1}_n}$$

dim: Verifichiamo che le due matrici sono uguali ovvero che

$$\left(A\, Agg(A)^t\right)_i^j = \begin{cases} \det A & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Vediamo prima le componente ii:

$$\left(A\, Agg(A)^t\right)_i^i = A_i \left(Agg(A)^t\right)^i$$

$$= A_i \left(Agg(A)_i\right)^t$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij} = \det A$$

Se $i \neq j$:

$$\left(A\,\mathrm{Agg}(A)^t\right)_i^j = A_i \left(\mathrm{Agg}(A)^t\right)^j$$

$$= A_i \left(\mathrm{Agg}(A)_j\right)^t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \mathrm{Agg}(A)_j^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, C_{jk}(A)$$

Sia B la matrice che ha le stesse righe di A a parte la j-esima che è uguale a A_i:

$$B = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \leftarrow j \\ \vdots \\ A_i \leftarrow i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Allora $b_{jk} = a_{ik}$ $\forall k = 1, \dots, n$. Inoltre

$$C_{jk}(B) = C_{jk}(A).$$

Dato che B ha due righe uguali, $\det(B) = 0$. Otteniamo, sviluppando $\det(B)$ lungo la j-esima riga:

$$0 = \det(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} C_{jk}(B)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk}(B) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk}(A)$$

$B_j = A_i$ $\qquad$ $C_{jk}(B) = C_{jk}(A)$

Come volevasi dimostrare. ∎

COR: Se A è invertibile

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t}$$

"Formula dell'inversa mediante il determinante" Talvolta si chiama "Formula di Cramer".

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{K})$ t.c. $ad-bc \neq 0$

$C_{11} = d \quad C_{21} = -b$

$C_{12} = -c \quad C_{22} = a$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Es: Calcolare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

utilizzando la formula di Cramer

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2$$

$$C_{11} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = 4, \quad C_{21} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \quad C_{31} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$C_{12} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = -2, \quad C_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \quad C_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$C_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4, \quad C_{23} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad C_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & -3 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Utilizzo della formula di Cramer per risolvere sistemi lineari

Sia $A \in Mat_{n\times n}$ una matrice non-singolare ovvero tale che $\det A \neq 0$. Allora per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ il sistema $AX = b$ ha l'unica soluzione

$$X = A^{-1} b.$$

Utilizziamo la formula di Cramer per descrivere le componenti $x_1, \dots, x_n$ di questa soluzione:

$$x_j = (A^{-1} b)_j = (A^{-1})_j \, b = \frac{1}{\det A} \left(Agg(A)^t\right)_j \, b$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(Agg(A)^j\right)^t b =$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{nj}\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}\right)$$

Quindi

$$\boxed{x_j = \frac{\det A^j(b)}{\det A}}$$

dove

$$A^j(b) := \left(A^1 | \dots | A^{j-1} | b | A^{j+1} | \dots | A^n\right)$$

(j)

Es: Trovare l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Sol.: La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a $11 \neq 0$.

Calcoliamo $\det A^1(b)$ e $\det A^2(b)$:

$$\det A^1(b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$\det A^2(b) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$\Rightarrow$ L'unica soluzione è $X = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Es: Trovare l'unica soluzione di

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.: Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 10 = 13 \neq 0$$

Calcoliamo $\det A^1(b)$, $\det A^2(b)$, $\det A^3(b)$:

$$\det A^1(b) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\det A^2(b) = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -(14 + 12) = -26$$

$$\det A^3(b) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -(3+10) = -13$$

L'unica soluzione del sistema è quindi

$$X = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 0 \\ -26 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∎

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non-singolare. Trovare una formula per la soluzione

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 = z_1 \\ c x_1 + d x_2 = z_2 \end{cases}$$

Sol.:

$$\det A^1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 & b \\ z_2 & d \end{pmatrix} = z_1 d - z_2 b$$

$$\det A^2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & z_1 \\ c & z_2 \end{pmatrix} = z_2 a - z_1 c$$

L'unica soluzione è

$$X = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d z_1 - b z_2 \\ -c z_1 + a z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Es: Calcolare l'inversa della seguente matrice utilizzando prima Cramer e poi l'algoritmo di inversione. Qual'è più veloce?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & -13 & 16 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -32 & 32 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} -13 & 16 \\ -32 & 32 \end{pmatrix}$$

$$= -\left(-13 \cdot 32 + 32 \cdot 16\right) = -32\left(16 - 13\right) = -32 \cdot 3$$

$$= -96 \neq 0$$

Quindi A è invertibile. Calcoliamo A^{-1} con la formula di Cramer:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\operatorname{Agg} A\right)^t$$

Dobbiamo calcolare i 9 cofattori:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 14 = -10$$

$$C_{12} = -\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -(6+10) = -16$$

$$C_{13} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = -21 - 10 = -31$$

$$C_{21} = -\det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = -(-6+28) = -22$$

$$C_{22} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 20 = -16$$

$$C_{23} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = -(-14+15) = -1$$

$$C_{31} = \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$C_{32} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -(-4-12) = 16$$

$$C_{33} = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 9 = 13$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-96} \begin{pmatrix} -10 & -22 & -2 \\ -16 & -16 & 16 \\ -31 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo adesso l'algoritmo di inversione:

$$(A|\mathbb{1}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -13 & 16 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -32 & 32 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/32 & 5/32 & -1/32 \\ 0 & -13 & 16 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/32 & 5/32 & -1/32 \\ 0 & 0 & 3 & 31/32 & 1/32 & -13/32 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/32 & 5/32 & -1/32 \\ 0 & 0 & 1 & 31/96 & 1/96 & -13/96 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 90/96 & 102/96 & -78/96 \\ 0 & 1 & 0 & 16/96 & 16/96 & -16/96 \\ 0 & 0 & 1 & 31/96 & 1/96 & -13/96 \end{array}\right) \rightsquigarrow_D$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10/96 & 22/96 & 2/96 \\ 0 & 1 & 0 & 16/96 & 16/96 & -16/96 \\ 0 & 0 & 1 & 31/96 & 1/96 & -13/96 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{96}\begin{pmatrix} 10 & 22 & 2 \\ 16 & 16 & -16 \\ 31 & 1 & -13 \end{pmatrix}$$

▨

Utilizzo del determinante per il calcolo del rango

Studiamo come utilizzare il determinante per calcolare il rango di una matrice qualunque (non necessariamente quadrata). Abbiamo bisogno della seguente notazione:

Notazione: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ e siano

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq m$ degli indici di riga e

$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$ degli indici di colonna.

La matrice

$A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t]) \in Mat_{s \times t}(\mathbb{K})$

è la sottomatrice di A supportata sulle righe $i_1, \dots, i_s$ e sulle colonne $j_1, \dots, j_t$.

In MATLAB: $A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t])$

Vediamo qualche esempio:

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$A([1,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$A([1,3],[2,4,5]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix}$

OSS 1: Se le colonne di una sottomatrice $A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t])$ sono lin. Ind. allora le colonne $A^{j_1},\dots,A^{j_t}$ di A sono lin. Ind.

Infatti, se denotiamo con $\bar{A}^{j_1},\dots,\bar{A}^{j_t} \in \mathbb{K}^s$ le colonne di $A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t])$, ogni relazione di dipendenza lineare $x_1 A^{j_1} + \dots + x_t A^{j_t} = 0$ induce una relazione di dipendenza lineare $x_1 \bar{A}^{j_1} + \dots + x_t \bar{A}^{j_t} = 0$.

Quindi, $\operatorname{rg} A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t]) \le \operatorname{rg} A$.

Def: Data $A \in Mat_{m\times n}$ ed una sottomatrice di ordine k

$B = A([i_1,\dots,i_k],[j_1,\dots,j_k])$

diciamo che la sottomatrice

$A([i_1,\dots i_k]\cup\{\ell\},[j_1,\dots j_k]\cup\{s\})$

ottenuta da B aggiungendo la riga ℓ-esima ($\ell \notin \{i_1,\dots,i_k\}$) e la colonna s-esima ($s \notin \{j_1,\dots,j_k\}$) **orla** la matrice B ed è un' **orlata di B**

Es: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$B = A([1,2],[1,2]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è orlata da

$A([1,2,3],[1,2,4]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ $(\ell=3,\ s=4)$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A([1,2],[2,3])$$

Orliamo B con la 3ª riga e la 1ª colonna

$$A([1,2]\cup\{3\}, [2,3]\cup\{1\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (B)$$

Orliamo B con la 3ª riga e la 4ª colonna

$$A([1,2]\cup\{3\}, [2,3]\cup\{4\}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (B)$$

Orliamo B con la 4ª riga e la 5ª colonna

$$A([1,2]\cup\{4\}, [2,3]\cup\{5\}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

oss 2: Se $\det A([i_1,\dots,i_k],[j_1,\dots,j_k]) \neq 0$ e $\det A([i_1,\dots,i_k]\cup\{e\},[j_1,\dots,j_k]\cup\{s\}) = 0 \ \forall e$

Allora $A^s \in \langle A^{j_1},\dots,A^{j_k}\rangle$.

Infatti, per oss 1, le colonne $A^{j_1},\dots,A^{j_k}$ di A sono lin. Ind. $\Rightarrow$ $rg(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s) \geq k$.

Se fosse $rg(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s) = k+1$ allora anche $Rg(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s) = k+1$. Quindi esiste una riga di $(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s)$ che insieme alle righe $i_1,\dots,i_k$ formano una base di $Row(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s)$.

Quindi esiste una riga e t.c. $\det A([i_1,\dots,i_k]\cup\{e\},[j_1,\dots,j_k]\cup\{s\}) \neq 0$ contro l'ipotesi.

Def: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dato un indice $1 \le k \le \min(m,n)$,

un minore di ordine k di A (o k-minore) è il determinante di una sottomatrice di A di taglia $k\times k$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Ci sono $3\cdot 6 = 18$ minori di ordine 2. Eccone due:

$\det A([1,2],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5$, $\det A([2,3],[2,4]) = 4$

Ci sono 4 minori di ordine 3

$\det A([1,2,3],[1,2,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = -15$

$\det A([1,2,3],[1,2,4]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 7$

$\det A([1,2,3],[1,3,4]) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 9$

$\det A([1,2,3],[2,3,4]) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 10$

Teorema degli orlati

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora $rg\, A = r$ se e solo $\exists$ r indici di riga $1 \le i_1 < \dots < i_r \le m$ ed r indici di colonna $1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$ t.c. il minore $\det A([i_1, \dots, i_r], [j_1, \dots, j_r])$ è diverso da zero e ogni minore ottenuto orlando tale minore è zero.

In formule,

$$rg(A) = r$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\ 1 \le i_1 < \dots < i_r \le m$ e $1 \le j_1 < \dots < j_r \le m$ t.c.

i) $\det\left(A([i_1, \dots, i_r], [j_1, \dots, j_r]\right) \neq 0$ e

ii) $\det\left(A\left([i_1, \dots, i_r] \cup \{\ell\}, [j_1, \dots, j_r] \cup \{s\}\right)\right) = 0$

$\forall\, \ell \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ e $\forall\, s \notin \{j_1, \dots, j_r\}$.

dim: Supponiamo che $rg(A)=r$.
Allora esistono r indici di colonna $1\le j_1<\dots<j_r\le n$ tali che le colonne $A^{j_1},\dots,A^{j_r}$ formano una base di $Col(A)$. Sia

$$B=(A^{j_1}|\dots|A^{j_r})\in Mat_{m\times r}(\mathbb{K})$$

la matrice che le ha come colonna.
Allora $rg(B)=r$. Poiché $Rrg(B)=rg(B)=r$ esistono r indici di riga $1\le i_1<\dots<i_r\le m$ tali che le righe $B_{i_1},\dots,B_{i_r}$ formano una base di $Row(B)$. Allora la matrice

$$B([i_1,\dots,i_r],[1,\dots,r])=A([i_1,\dots,i_r],[j_1,\dots,j_r])$$

ha rango r e quindi è invertibile e quindi il minore di ordine r

$$\det A([i_1,\dots,i_r],[j_1,\dots,j_r])$$

è diverso da zero. Ne segue che la condizione (i) è verificata.

Se aggiungiamo a B una colonna A^s di A con $s \notin \{j_1, \dots, j_r\}$, otteniamo una matrice che ha ancora rango r. Quindi tale matrice non può avere $r+1$ righe linearmente indipendenti. In altre parole Tutti i suoi minori di ordine $r+1$ sono zero.
Questo dimostra la condizione (ii).

L'altra implicazione ($\Uparrow$) è l'oss 2 che abbiamo visto prima.

□

Es: Stabilire se l'insieme

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

è linearmente indipendente.

Sol.: Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ che ha gli el. di V come colonne.

Dato che il minore

$$\det A([1,2],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

concludiamo $\operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow V$ è lin. Ind. ☒

Es: Stabilire se

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è lin. Ind..

Sol.: Calcoliamo $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Il minore

$$\det A([2,3],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2.$$

Orliamo questo minore in Tutti i modi possibili:

$$\det A([2,3] \cup \{1\}, [1,2] \cup \{3\}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A([2,3] \cup \{2\}, [1,2] \cup \{3\}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2.$$

Es: Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol.: Cerchiamo un minore diverso da zero: ad esempio

$$\det A([1,4],[1,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ \textcircled{2} & 1 & \textcircled{3} & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\operatorname{rg} A \geq 2$. Cerchiamo un minore orlato diverso da zero (se non c'è allora $\operatorname{rg} A = 2$): ad esempio

$$\det A([1,4] \cup \{2\}, [1,3] \cup \{2\}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Orliamo questo minore nei due modi possibili (c'è solo una colonna che possiamo aggiungere):

$$\det A([1,2,4]\cup\{3\},:) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A([1,2,4]\cup\{5\},:) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3.$$

Determinante di matrici Triangolari a blocchi

Una matrice della forma

$$T = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right)$$

dove $A \in Mat_{k\times k}$, $B \in Mat_{t\times t}$ sono quadrate, si dice **Triangolare a blocchi**.

TEOREMA:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) = \det A \det B$$

dim: Supponiamo, prima, che $\det A \det B \neq 0$, ovvero che sia A che B sono invertibili. Allora

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & A^{-1}C \\ O & \mathbb{1}_t \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono invertibili, esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_f \in Mat_{k\times k}$, $F_1, \dots, F_e \in Mat_{t\times t}$ tali che

$$A = E_1 \cdots E_f \,, \quad B = F_1 \cdots F_e \,.$$

Allora

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \cdots E_f & 0 \\ 0 & F_1 \cdots F_e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & F_e \end{pmatrix}$$

Osserviamo che le matrici

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \,, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

dove E ed F sono elementari, sono ancora matrici elementari dello stesso Tipo:

$$\begin{pmatrix} P_{ij} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = P_{ij} \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & P_{ij} \end{pmatrix} = P_{i+k,\, j+k}$$

$$\begin{pmatrix} D_i(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = D_i(\lambda) \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & D_i(\lambda) \end{pmatrix} = D_{i+k}(\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} F_{ij}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = F_{ij}(\lambda) \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F_{ij}(\lambda) \end{pmatrix} = F_{i+k,\, j+k}(\lambda)$$

Quindi

$$\det \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \det E, \quad \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \det F.$$

Concludiamo che

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F_e \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} E_1 & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdots \det \begin{pmatrix} E_f & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & F_1 \end{pmatrix} \cdots \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & F_e \end{pmatrix}$$

$$= \det E_1 \cdots \det E_f \det F_1 \cdots \det F_e$$

$$= \det(E_1 \cdots E_f) \det(F_1 \cdots F_e)$$

$$= \det A \det B,$$

Come volevamo dimostrare.

Supponiamo adesso che $\det A \det B = 0$, ovvero che A o B non è invertibile.

$$(A \mid \mathbb{1}_k) \rightsquigarrow (U_0 \mid T), \quad (B \mid \mathbb{1}_t) \rightsquigarrow (V_0 \mid S)$$

$U_0 = \mathrm{rref}(A)$, $V_0 = \mathrm{rref}(B)$. Allora

$TA = U_0$ e $SB = V_0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \det \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$ è triangolare superiore, il suo determinante è uguale al prodotto dei suoi elementi diagonali che però contengono uno zero (perché o U_0 o V_0 non ha rango massimo). Quindi

$$\det \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = 0 = \det A \det B. \qquad \square$$

COR: $$\det \begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,n) \\ 0 & A(2,2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A(n,n) \end{pmatrix}$$

$$= \det A(1,1) \det A(2,2) \cdots \det A(n,n)$$