

# Spazi Vettoriali

Def: Uno spazio vettoriale su un campo  $K$ , o  $K$ -spazio vettoriale, è una tripla  $(V, +, \cdot)$  composta da un insieme  $V$ , un'operazione

$$+ : V \times V \longrightarrow V : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

ed un prodotto per scalari

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V \quad (c, v) \mapsto cv$$

con le seguenti proprietà:

$$\left. \begin{array}{l} (SV1) : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \\ (SV2) : \exists 0_V \in V \text{ t.c. } v + 0_V = 0_V + v = v \\ (SV3) : \forall v \in V \exists w \in V \text{ t.c. } v + w = w + v = 0_V \\ (SV4) : v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (V, +) \\ \text{è un} \\ \text{gruppo} \\ \text{abeliano} \end{array}$$

$$(SV5) : (a+b)v = av + bv$$

$$(SV6) : (ab)v = a(bv)$$

$$(SV7) : a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$$

$$(SV8) : 1v = v$$

$$\begin{array}{l} \forall v_1, v_2, v_3, v, w \in V \\ \forall a, b \in K. \end{array}$$

Gli spazi vettoriali sono strutture formali che dobbiamo imparare a conoscere e maneggiare.

Def: Un vettore è un elemento di uno spazio vettoriale

Prima di discutere le proprietà degli spazi vettoriali, facciamo qualche esempio.

Es:  $(\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  <sup>prodotto per scalari</sup> è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  
In particolare,

$$\mathbb{R}^n := \text{Mat}_{n \times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

= insieme delle  $n$ -uple  
ordinate di numeri reali  
(scritti in colonna)

è uno spazio vettoriale.

NB: Le  $n$ -uple sono ordinate!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Es2 : (Vetтори geometrici del piano).

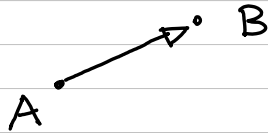
Consideriamo  $\mathbb{E}^2$  (il piano euclideo).

Fissiamo un punto  $O \in \mathbb{E}^2$ .

Dati due punti  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{E}^2$   
denotiamo con  $\overline{AB}$  il segmento  
di estremi  $A$  e  $B$



Denotiamo con  $\overrightarrow{AB}$  il segmento  
orientato da  $A$  a  $B$

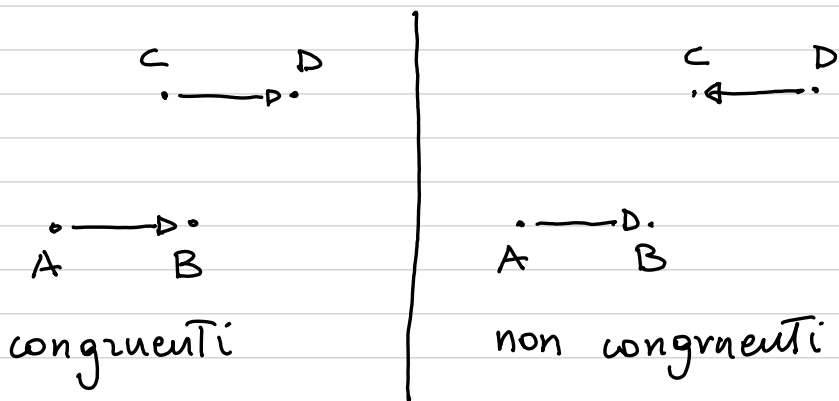


Diciamo che  $\overrightarrow{AB}$  è congruente a  $\overrightarrow{CD}$  se

1)  $\overline{AB}$  è congruente a  $\overline{CD}$

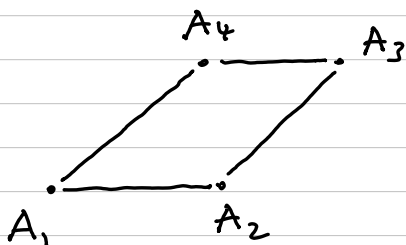
2)  $\overrightarrow{AB}$  è parallelo a  $\overrightarrow{CD}$

3)  $\overrightarrow{AB}$  è orientato come  $\overrightarrow{CD}$  :



Scriviamo  $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{CD}$ .

Es: Consideriamo un parallelogramma



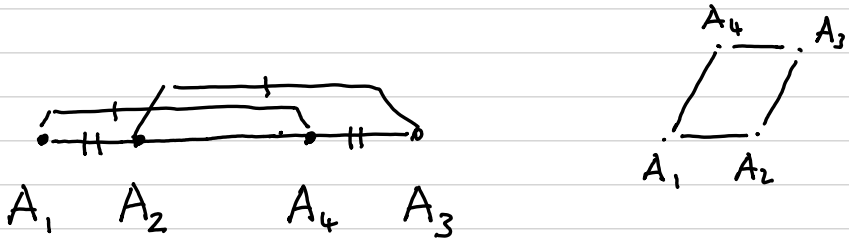
allora

$$\overleftrightarrow{A_1 A_2} \equiv \overleftrightarrow{A_4 A_3} \quad c$$

$$\overleftrightarrow{A_2 A_3} \equiv \overleftrightarrow{A_1 A_4}.$$

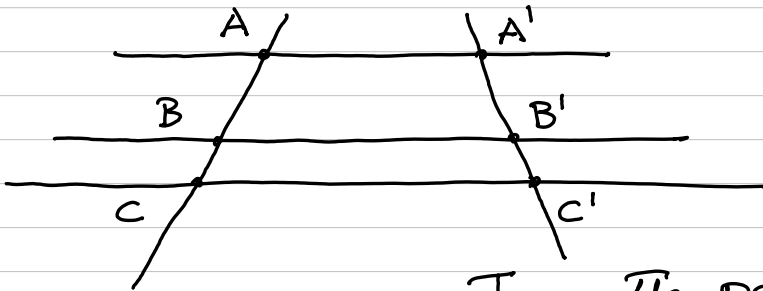
NB:  $\overleftrightarrow{A_1 A_2} \not\equiv \overleftrightarrow{A_3 A_4}$

Vale anche se il parallelogramma  
è degenere



$$\overrightarrow{A_1 A_2} \equiv \overrightarrow{A_4 A_3}, \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \equiv \overrightarrow{A_1 A_4}.$$

### Teorema di Talete



$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{A'B'}|}$$

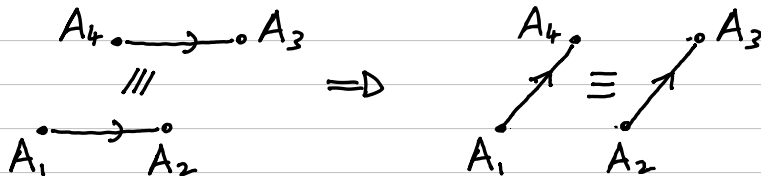
Tre rette parallele.  
Tagliano rispettivamente  
su due rette trasversali  
coppie di segmenti  
di lunghezze  
proporzionali.

## Teorema del parallelogramma

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha due lati opposti paralleli e congruenti.

OSS: Da questo Teorema deduciamo:

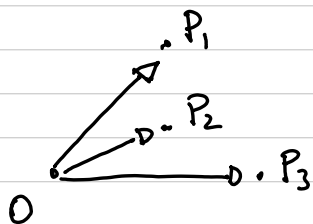
Dato un quadrilatero  $Q$  di vertici  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , se  $\overrightarrow{A_1 A_2} \equiv \overrightarrow{A_4 A_3}$  allora anche  $\overrightarrow{A_2 A_3} \equiv \overrightarrow{A_1 A_4}$ .



Def: (Vetтори geometrici del piano applicati a 0)

Fissiamo un punto  $O \in \mathbb{E}^2$  e definiamo

$$\mathcal{V}_O^2 = \{ \overrightarrow{OP} : P \in \mathbb{E}^2 \}$$



$$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3} \in \mathcal{V}_O^2$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} \notin \mathcal{V}_O^2.$$

Diamo all'insieme  $\mathcal{V}_O^2$  dei vettori geometrici del piano applicati al punto  $O \in \mathbb{E}^2$  una struttura di spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Dobbiamo definire una somma

$$+ : \mathcal{V}_O^2 \times \mathcal{V}_O^2 \longrightarrow \mathcal{V}_O^2$$

ed un prodotto per scalari

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_O^2 \longrightarrow \mathcal{V}_O^2$$

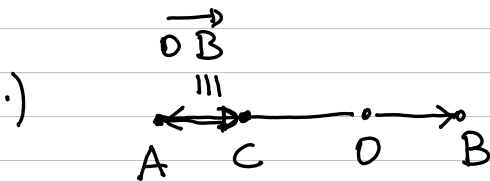
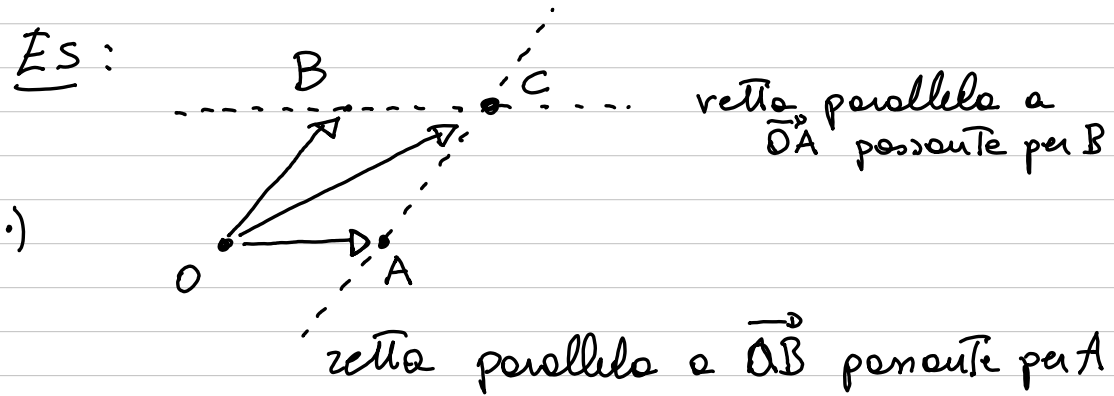
Def: Somma in  $\mathcal{V}_0^2$ :

Dati  $\vec{OA}, \vec{OB} \in \mathcal{V}_0^2$  definiamo

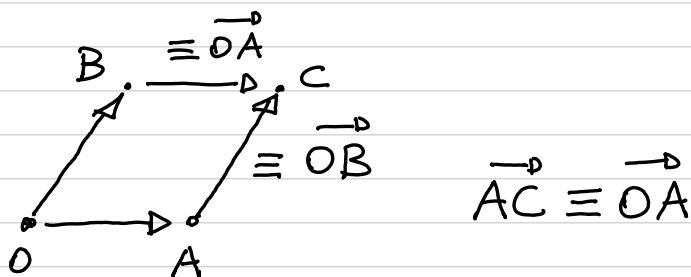
$$\vec{OA} + \vec{OB} =: \vec{OC}$$

dove  $C$  è l'unico punto t.c.  $\vec{AC} \equiv \vec{OB}$ .

Es:



## Metodo punta-coda:



Spostare  $\vec{OB}$  sulla punta di  $\vec{OA}$   
in maniera che  $O$  coincida con  $A$ .

Prop.:  $(V_0^2, +)$  è un gruppo commutativo.

dim:

.) El. Neutro:  $\vec{OO}$ . Infatti

$$\vec{OA} + \vec{OO} = \vec{OC} \quad \text{dove } C \text{ è il punto}$$

talché  $\vec{AC} \equiv \vec{OO}$ . Ma allora  $C = A$ .

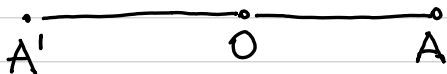
.) Commutativo:

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} \stackrel{\text{def}}{\iff} \vec{AC} \equiv \vec{OB}$$

$$\iff \vec{BC} \equiv \vec{OA} \stackrel{\text{def}}{\iff} \vec{OB} + \vec{OA} = \vec{OC}$$

Teorema  
parallelogramma

•) El. opposto: Dato un punto  $A \in \mathcal{E}^2$   
 esiste un unico punto  $A' \in \mathcal{E}^2$  t.c.  
 $\overrightarrow{A'O} \equiv \overrightarrow{OA}$



$$-\overrightarrow{OA} := \overrightarrow{OA'}$$

Allora  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OC}$  dove  $C$  è t.c.

$$\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OA'} \equiv \overrightarrow{AO}$$

$$\Rightarrow C = O.$$

•) Associatività: Dobbiamo dimostrare

$$(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}).$$

Poniamo

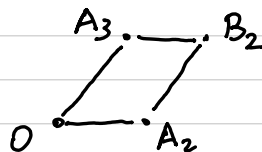
$$\vec{OB}_1 := \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$$

(a)

$$\Rightarrow A_1 B_1 \equiv \vec{OA}_2 \Leftrightarrow \boxed{A_2 B_1 \equiv \vec{OA}_1}$$

$$\vec{OB}_2 := \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{A_2 B_2 \equiv \vec{OA}_3} \quad (b)$$

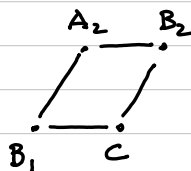


$$\vec{OC} := \vec{OB}_1 + \vec{OA}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1 C \equiv \vec{OA}_3} \quad (c)$$

Dimostriamo che

$$\vec{OC} \equiv \vec{OA}_1 + \vec{OB}_2$$



$$\begin{matrix} \vec{B_1 C} \equiv \vec{OA_3} & \vec{OA_3} \equiv \vec{A_2 B_2} \\ (c) & (b) \end{matrix}$$

Teo. Par.

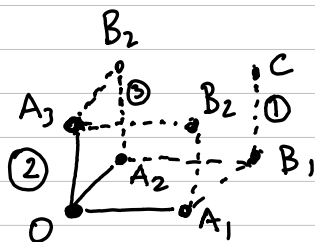
$$\vec{B_2 C} \equiv \vec{A_2 B_1} \equiv \vec{OA_1} \Rightarrow \vec{B_2 C} \equiv \vec{OA_1}$$

(a)

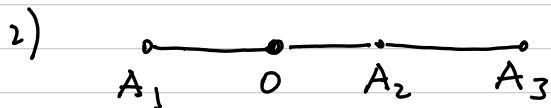
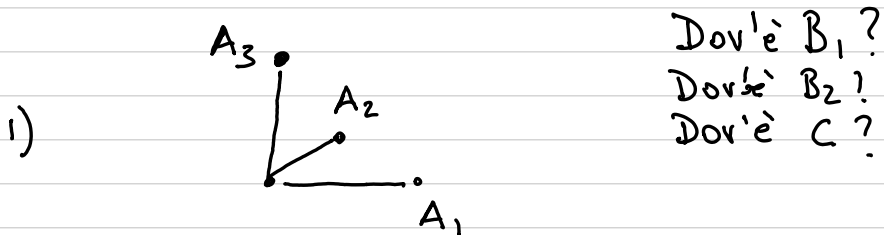
Def

$$\vec{OC} = \vec{OB}_2 + \vec{OA}_1 \stackrel{\text{commutativit\`a}}{=} \vec{OA}_1 + \vec{OB}_2$$

□



Es : 1) Ripercorrere la dimostrazione  
dell'associatività nel caso



Def: Dato  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\vec{OA} \in \mathcal{V}_0^2$  definiamo  
 $\lambda \vec{OA} =: \vec{OB}$

dove  $B$  è il punto sulla retta per  $\vec{OA}$   
t.c.

1)  $|\vec{OB}| = |\lambda| |\vec{OA}|$

2)  $B$  è sulla semiretta  $OA$  se  $\lambda > 0$ ,  
 $B$  è sull'altra semiretta se  $\lambda < 0$ .



NB: Se  $\lambda = 0$  allora  $B = O$ , poiché l'unico  
segmento con estremo  $O$  di lunghezza  
zero è  $\vec{OO}$ .

OSS 1:  $\lambda \vec{OO} = \vec{OO} \quad \forall \lambda$ .

In fatti  $\vec{OO}$  è l'unico elemento di  $\mathcal{V}_0^2$   
di lunghezza 0.

Proposizione : Dati  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \in \mathcal{E}^2$ :

valgono le seguenti uguaglianze in  $\mathcal{V}_0^2$

$$(1) (a+b) \vec{OA} = a \vec{OA} + b \vec{OA}$$

$$(2) (ab) \vec{OA} = a (b \vec{OA})$$

$$(3) 1 \vec{OA} = \vec{OA}$$

$$(4) a (\vec{OA} + \vec{OB}) = a \vec{OA} + a \vec{OB}$$

dim : (1) Poniamo

$$\vec{OC} := (a+b) \vec{OA}, \vec{OA}_1 := a \vec{OA}, \vec{OA}_2 := b \vec{OA}, \vec{OD} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2.$$

Dobbiamo dimostrare che  $\boxed{C=D}$ .

Possiamo assumere che  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  e  $a \leq b$ .

Se  $A=0$  l'uguaglianza è vero per l'oss 1.

Supponiamo  $A \neq 0$ . Ci sono quattro

casi: 1)  $a, b > 0$

2)  $a < 0 < b$  e  $|a| \leq |b|$

3)  $a < 0 < b$  e  $|a| > |b|$

4)  $a, b < 0$ .

Scrivendo A a destra di O, essi corrispondono alle seguenti 4 situazioni:

$$1) \quad \begin{array}{c} O \quad A_1 \quad A_2 \quad D \\ \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (a, b > 0)$$

$$2) \quad \begin{array}{c} A_1 \quad O \quad D \quad A_2 \\ \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (a < 0 < b, |a| \leq |b|)$$

$$3) \quad \begin{array}{c} A_1 \quad D \quad O \quad A_2 \\ \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (a < 0 < b, |a| > |b|)$$

$$4) \quad \begin{array}{c} D \quad A_1 \quad A_2 \quad O \\ \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (a, b < 0)$$

Si noti che  $|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{A_2D}|$  e  $|\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{A_1D}|$ , poiché  
 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ . Analizziamoli separatamente:

$$1) \quad |\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{A_1D}| = |\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{OA_2}| = a|\overrightarrow{OA}| + b|\overrightarrow{OA}| \\ = (a+b)|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$$

Poiché C e D sono a destra di O si ha  $D=C$

$$2) \quad |\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{DA_2}| = |\overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{OA_1}|. \text{ Quindi}$$

$$|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA_2}| - |\overrightarrow{OA_1}| = |b||\overrightarrow{OA}| - |a||\overrightarrow{OA}| = \\ = (|b| - |a|)|\overrightarrow{OA}| = |a+b||\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$$

Poiché D e C sono a destra di O si ha  $D=C$ .

$$3) \quad |\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{A_1D}| = |\overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{OA_2}|. \text{ Quindi}$$

$$|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA_1}| - |\overrightarrow{OA_2}| = (|a| - |b|)|\overrightarrow{OA}| = |a+b||\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$$

Poiché  $D$  e  $C$  sono entrambi a sinistra di  $O$ ,  
ne segue che  $D=C$ .  $a, b < 0$

$$4) |\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{OA_2}| = (|a| + |b|) |\overrightarrow{OA}| \stackrel{a, b < 0}{=} |a+b| |\overrightarrow{OA}| \\ = |\overrightarrow{OC}|$$

Poiché  $D$  e  $C$  sono entrambi a sinistra di  $O$ ,  
ne segue che  $D=C$ .  $\blacksquare$

$$(2) (ab)(\overrightarrow{OA}) = a(b \overrightarrow{OA}).$$

$$\text{Poniamo } \overrightarrow{OA_1} = (ab) \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_2} = b \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_3} = a \overrightarrow{OA_2}.$$

Possiamo supporre  $ab \neq 0$ .

$$|\overrightarrow{OA_1}| = |ab| |\overrightarrow{OA}| = |a| |b| |\overrightarrow{OA}| = |a| |\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_3}|$$

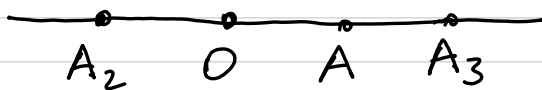
Rimane da dimostrare che  $A_1$  e  $A_3$  sono  
della stessa parte rispetto a  $O$ :

Se  $ab > 0$  allora  $a, b > 0$  oppure  $a, b < 0$ .

Quindi  $A_3$  è sulla stessa semiretta di  $A$ .

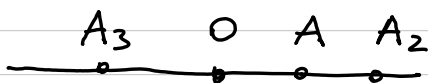
Se  $a$  e  $b$  sono positivi,  $A_2$  è nella stessa  
semiretta di  $A$  e  $A_3$  è sulla semiretta di  
 $A_2$  che coincide con quella per  $A$

e abbiamo finito. Se  $a$  e  $b$  sono negativi, allora la situazione è



ovvero  $A_2$  giace sulla semiretta che non contiene  $A$  ma  $A_3$  giace sulla semiretta che non contiene  $A_2$  e che quindi contiene  $A$ . Abbiamo finito.

Se  $ab < 0$  allora



$b > 0, a < 0$



$b < 0, a > 0$

In entrambi i casi  $A_3$  giace sulla semiretta che non contiene  $A$ .  $\square$

③  $\overrightarrow{1OA} = \overrightarrow{OA}$ . Poniamo  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{1OA}$ . Allora  $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}|$  e  $A$  e  $B$  giacciono della stessa parte rispetto a  $O$ .

$$(4) \quad a(\vec{OA} + \vec{OB}) = a\vec{OA} + a\vec{OB}.$$

dim: Possiamo assumere  $A \neq O$ ,  $B \neq O$ ,  $a \neq 0$ .

Se  $A, O$  e  $B$  sono allineati, allora

$$\vec{OB} = t \vec{OA}$$

per  $|t| = \frac{|\vec{OB}|}{|\vec{OA}|}$ . Quindi,

$$a(\vec{OA} + \vec{OB}) = a(\vec{OA} + t\vec{OA}) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} a(1+t)(\vec{OA})$$

$$\stackrel{(2)}{=} (a+at)\vec{OA}$$

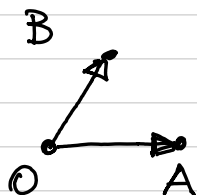
$$\stackrel{(1)}{=} a\vec{OA} + (at)\vec{OA}$$

$$\stackrel{(2)}{=} a\vec{OA} + a(t\vec{OA})$$

$$= a\vec{OA} + a\vec{OB}.$$

Possiamo quindi assumere che i 3 punti  $O, A$  e  $B$  non siano allineati.

Abbiamo quindi la seguente situazione



Ci sono due casi: 1)  $a > 0$ , 2)  $a < 0$ .

Caso 1):  $a > 0$ :

Poniamo  $\vec{OA}_1 = a \vec{OA}$ ,  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .

Siano.  $\tau_1 =$  retta per O e B.

$\tau_2 =$  retta per A parallela a  $\tau_1$

$\tau_3 =$  retta per  $A_1$  parallela a  $\tau_2$

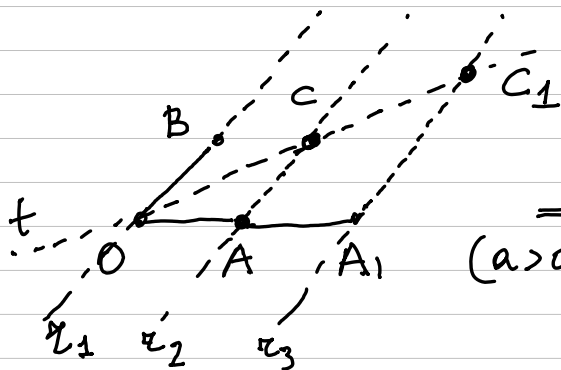
$t =$  retta per O e C.

$C_1 := t \cap \tau_3$

Da Talete abbiamo

$$\frac{|\vec{OC}_1|}{|\vec{OC}|} = \frac{|\vec{OA}_1|}{|\vec{OA}|} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OC}_1 = a \vec{OC}} \quad (*)$$



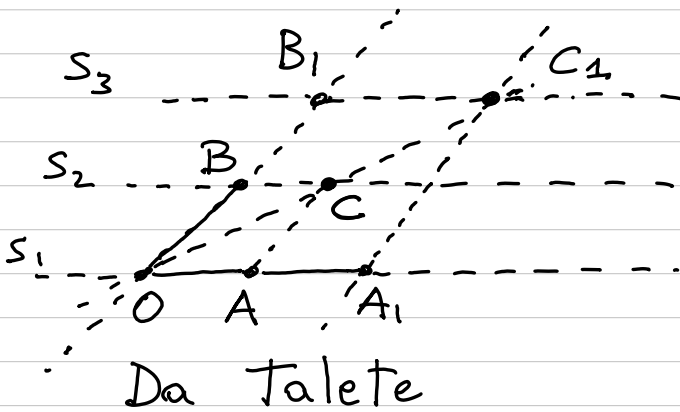
Siano

$S_1 = \text{retta per } O \text{ e } A$

$S_2 = \text{retta per } B \text{ parallela a } S_1$

$S_3 = \text{retta per } C_1 \text{ parallela a } S_1$

$$B_1 := S_3 \cap r_1$$



Da Talete

$$\frac{|\overline{OB_1}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{OC_1}|}{|\overline{OC}|} = a \quad (**)$$

Quindi  $\boxed{\vec{OB_1} = a \vec{OB}}$  (perché  $a > 0$ ).

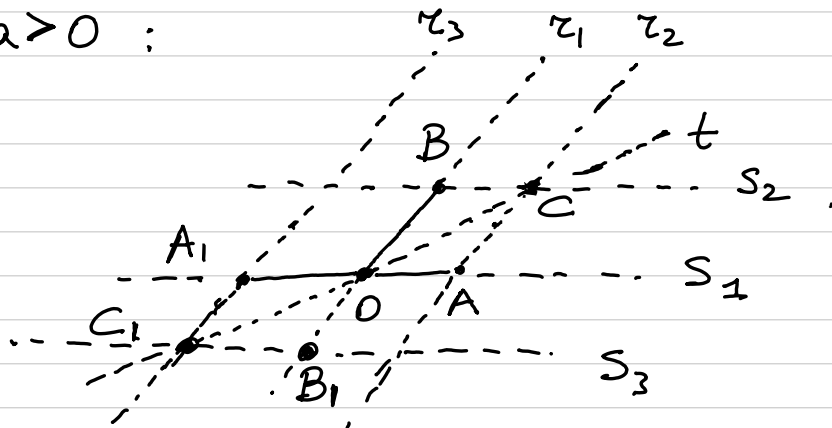
Per costruzione

$$\vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \vec{OC_1}.$$

Quindi,

$$a \vec{OC} = \vec{OC_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = a \vec{OA} + a \vec{OB}. \quad (*) \quad (**)$$

Caso 2)  $a < 0$ . Stesse notazioni del caso  $a > 0$  :



Talite

$\Rightarrow$

$$\frac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{OA}|} = |a|$$

$C_1$  e  $C$  giacciono su semirette diverse

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OC_1} = a \overrightarrow{OC}} (*)$$

Usando  $s_1, s_2, s_3, t$ , Talite implica

$$\frac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{OC}|} = |a|$$

Dato che  $B$  e  $B_1$  giacciono su semirette diverse ne segue che

$$\boxed{\overrightarrow{OB_1} = a \overrightarrow{OB}} (**).$$

Adesso concludiamo come sopra  $\square$

## Polinomi:

$$\mathbb{R}[x] = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \mid m \geq 0, \\ a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \}$$

Il grado di

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

è  $n$  se  $a_n \neq 0$ .

$$\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

= polinomi di grado  $\leq n$ .

Somma e prodotto per scalari

sono definiti grado per grado.

Otteniamo che  $\mathbb{R}[x]$  e  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$

sono uno spazio vettoriale.

# Funzioni reali di variabile reale

Date due funzioni

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiamo la funzione somma

$$f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

come

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Similmente, definiamo la funzione

$$af: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

prodotto per lo scalare  $a \in \mathbb{R}$ , come

$$(af)(x) = a f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo così uno spazio vettoriale  
che denotiamo

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funzione} \}.$$

## Funzioni a valori in un campo

Generalizziamo l'esempio precedente:

sia  $X$  un insieme e  $K$  un campo.

Consideriamo l'insieme

$$K^X = \{ f: X \rightarrow K \}$$

delle funzioni da  $X$  a  $K$ .

Dotiamo  $K^X$  delle due operazioni

"puntuali":

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in K^X, \quad \forall x \in X$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x), \quad \forall f \in K^X, \quad \forall \alpha \in K.$$

Allora  $(K^X, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale su  $K$ . (Esercizio).

Si noti che

$$K^n \cong K^X \quad \text{con } X = [1, n] = \{1, \dots, n\}$$

$$\text{e } \text{Mat}_{m \times n}(K) \cong K^X \quad \text{con } X = [1, m] \times [1, n].$$

## Proprietà degli spazi vettoriali

Sia  $V = (V, +, \cdot)$  uno spazio vettoriale.

.) Il vettore nullo  $\bar{e}$  è unico: (perché  $(V, +)$  è un grp)

Se  $\exists O'_V$  un altro elemento neutro per  $+$ ,  
allora  $O_V$ , allora

$$O_V = O_V + O'_V = O'_V.$$

## Legge di cancellazione per la somma

Dati comunque  $v, u, w \in V$  si ha

$$v + u = v + w \implies u = w$$

dim:

$$\begin{aligned} u &= u + O_V = u + (v - v) = (u + v) - v = (v + u) - v \\ &= (v + w) - v = (w + v) - v = w + (v - v) = w + O_V = w. \end{aligned}$$



.)  $L'$  opposto  $\bar{e}$  unico:

$$\text{Se } v+u=0_V=v+w \xrightarrow[\text{Cancellazione}]{\text{Legge di}} u=w=-v.$$

$$.) \quad 0v = 0_V \quad \forall v \in V$$

dim:

$$v + 0v = (1+0)v = 1v = v = v + 0_V$$

$$\Rightarrow 0v = 0_V$$

legge  
di cancellazione

$$.) \quad (-1)v = -v$$

dim:

$$v + (-1)v = (1-1)v = 0v = 0_V = v - v$$

$$\Rightarrow (-1)v = -v. \quad \square$$

$$.) \quad t 0_V = 0_V \quad \forall t \in K$$

dim:

$$t 0_V = t (0_V + 0_V) \stackrel{(*)}{=} t 0_V + t 0_V$$

$$\Rightarrow 0_V = t 0_V - t 0_V = \underbrace{(t 0_V + t 0_V)}_{(*)} - t 0_V = t 0_V$$

## legge di annullamento

$$tv = 0_V \Leftrightarrow t=0 \text{ oppure } v=0_V$$

dim:

$\Rightarrow$ ) Supponiamo  $tv = 0_V$ . Se  $t \neq 0$  allora

$$0_V = t^{-1} 0_V = t^{-1}(tv) = (t^{-1}t)v = 1v = v.$$

$\Leftarrow$ ) Abbiamo già dimostrato che  $0v = 0_V$ .  
e che  $t 0_V = 0_V \quad \forall t \in \mathbb{K}$  ▣

$$\cdot) \quad v = w \Leftrightarrow v - w = 0_V$$

dim:

$$\Rightarrow) \quad v - w = w - w = 0_V$$

$$\Leftarrow) \quad 0_V = w - w = v - w.$$

$$\text{Oppure, } v = w \Rightarrow v - v = w - v \Leftrightarrow 0_V = w - v.$$

## Combinazioni lineari

Sia  $V = (V, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale.

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_k$   $k$  vettori di  $V$ .

Una combinazione lineare di  $v_1, v_2, \dots, v_k$  è un vettore della forma

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

per qualche  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ .

I numeri  $t_1, t_2, \dots, t_k$  si chiamano i coefficienti della combinazione lineare.

Notazione :

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

$$= \left\{ t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \mid t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{K} \right\}$$

Esso si chiama lo spazio delle combinazioni lineari di  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .

NB:

.)  $0_V \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$ . Infatti,

$$0_V = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k.$$

.)  $\mathcal{L}(0_V) = \{t0_V \mid t \in \mathbb{K}\} = \{0_V\}.$

.)  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$ . Infatti,

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k$$

$$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k$$

$$\vdots$$
$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_k.$$

( $\forall i = 1, \dots, k$ ).

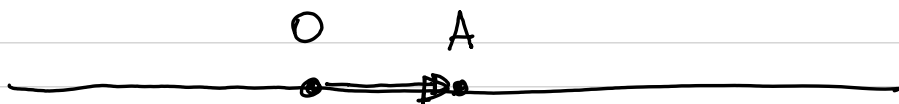
.)  $\text{Span}(2v) = \text{Span}(v)$ .  $\forall v \in V$ .

(Esercizio)

Es: .)  $v \neq 0_V \Rightarrow \mathcal{L}(v) = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\} \neq \{v\}.$

$$\rightarrow V = v_0^2 \quad A \neq 0$$

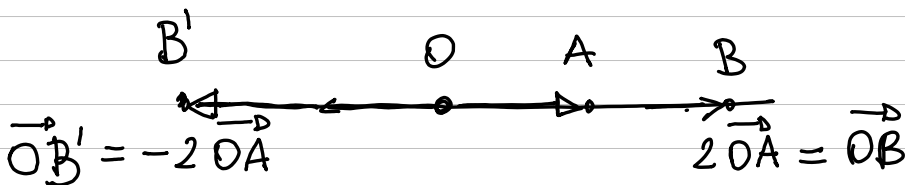
$\mathcal{L}(\vec{OA}) =$  retta per O e A:



Infatti,  $t \vec{OA} = \vec{OB} \Rightarrow$  B giace sulla  
retta per O e A. Viceversa, se

B giace sulla retta per O e A allora  
 $\vec{OB} = t \vec{OA}$

dove  $t = \begin{cases} \frac{|\vec{OB}|}{|\vec{OA}|} & \text{se B e A giacciono} \\ & \text{della stessa parte} \\ -\frac{|\vec{OB}|}{|\vec{OA}|} & \text{se B e A giacciono} \\ & \text{su semirette} \\ & \text{diverse} \end{cases}$



Def: Sia  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$  definiamo

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{A^1, A^2, \dots, A^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

Esso si chiama lo spazio delle colonne di A.

Ad esempio se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  allora

$$\text{Col}(A) = \text{Span}(A^1, A^2)$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

Es (importante)

$$\mathbb{K}^n = \text{Span} \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ dove}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \in \mathbb{K}^n$$

dim :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Per  $n=2$  :

$$\mathbb{K}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

Per  $n=3$  :

$$\mathbb{K}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

## Sottospazi Vettoriali

Sia  $V$  un  $K$ -spazio vettoriale.

Un sottoinsieme  $U \subseteq V$  si dice un sottospazio vettoriale se

$$(0) \quad 0_V \in U$$

$$(1) \quad u_1 + u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U$$

$$(2) \quad tu \in U \quad \forall t \in K \quad \forall u \in U$$

NB  $\therefore$  Se  $U$  è non-vuoto,  $(2) \Rightarrow (0)$ .

Quindi (0) può essere riformulato da

$$(0') \quad U \text{ è non vuoto } (U \neq \emptyset).$$

$$\therefore (1), (2) \Leftrightarrow$$

$$(3) \quad \alpha u_1 + \beta u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u_1, u_2 \in U.$$

Per verificare che un sottoinsieme  $U$  di  $V$  sia un sottospazio:

$$(I) \quad U \neq \emptyset$$

$$(II) \quad \alpha u_1 + \beta u_2 \in U, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Es: .)  $\{0_V\}$  è un sottospazio  
vettoriale di  $V$  che si chiama

### SOTTOSPAZIO NULLO

.)  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ ,

$\{0\}$  e  $V$  si dicono sottospazi banali.

$$.) \quad v \neq 0_V. \quad \text{Span}\{v\} = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\}$$

è un sottospazio vettoriale:

$$(I) \quad v = 1v \in \text{Span}\{v\} \neq \emptyset$$

$$(II) \quad \alpha(tv) + \beta(sv) = (\alpha t + \beta s)v \in \text{Span}\{v\} \\ \forall \alpha, \beta, t, s \in \mathbb{K}$$

PROP:  $U, W \subset V$  sottospazi vettoriali  
 $\Rightarrow U \cap W$  è un sottospazio vettoriale.

dim:  $0_V \in U, 0_V \in W \Rightarrow 0_V \in U \cap W$ .

Siano  $u_1, u_2 \in U \cap W$  e  $\alpha, \beta \in K$ .

Allora  $u_1, u_2 \in U$  e  $u_1, u_2 \in W$ .

$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$  (Perché  $U$  è un sottospazio)

$\alpha u_1 + \beta u_2 \in W$  (perché  $W$  è un sottospazio)

$\Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 \in U \cap W$  ■

TEOREMA:

1) Dati  $v_1, \dots, v_k \in V$

$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$  è un sottospazio vettoriale.

2)  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \bigcap \{ U \text{ s.sp. di } V \mid v_i \in U \forall i \}$

è il più piccolo sottospazio vettoriale di  $V$  contenente  $v_1, \dots, v_k$ .

dim:

1)  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$  che quindi è non-vuoto.

Dati  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $u, w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$

facciamo vedere che

$$\alpha u + \beta w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k).$$

Per definizione,  $\exists t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_k \in \mathbb{K}$  t.c.

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k, \quad w = s_1 v_1 + \dots + s_k v_k.$$

Allora,

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta w &= \alpha (t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) + \beta (s_1 v_1 + \dots + s_k v_k) \\ &= (\alpha t_1 + \beta s_1) v_1 + \dots + (\alpha t_k + \beta s_k) v_k \\ &\in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

2) Sia  $U \subseteq V$  s.s.p. vettoriale t.c.  $v_1, \dots, v_k \in U$ .

Allora  $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in U \quad \forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ .

Quindi  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) \subseteq U$ .

□

Def: Il sottospazio vettoriale

$$\cap \{U \text{ s.sp. di } V \mid v_1, \dots, v_k \in U\}$$

si chiama sottospazio generato da  $v_1, \dots, v_k$   
e si denota con  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ .

Il Teorema dice che

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

Notazione: Dato un insieme  $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_k\}$   
di vettori di  $V$  denotiamo

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}) = \text{Span}(\mathcal{L}) := \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$\langle \mathcal{L} \rangle := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Es: a)  $\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$ .

I generatori  $\{1, x, \dots, x^n\}$  di  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  si chiamano generatori standard.

b)  $\mathbb{K}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  dove  $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

I generatori  $\{e_1, \dots, e_n\}$  si chiamano generatori standard di  $\mathbb{K}^n$

Si chiamano "standard" perché la uguaglianza in a) e b) è fondamentalmente la definizione dei due spazi vettoriali.

$\mathbb{V}_0^2$  non ha generatori "standard".

Es: Siano  $A, B \in \mathbb{E}^2$  t.c.  $A \neq O, B \neq O$  ed i punti  $O, A$  e  $B$  non sono allineati. Allora

$$V_0^2 = \text{Span}(\vec{OA}, \vec{OB}).$$

Sol.: Facciamo vedere che  $\forall P \neq O$

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \vec{OP} = t_1 \vec{OA} + t_2 \vec{OB}.$$

Poniamo: •  $\tau_1 =$  retta per  $O$  e  $B$

•  $\tau_2 =$  retta per  $O$  e  $A$

•  $S_1 =$  retta per  $P$  parallela a  $\tau_1$

•  $S_2 =$  retta per  $P$  parallela a  $\tau_2$ .

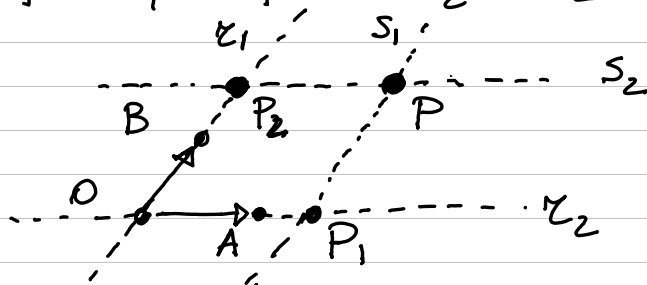
•  $P_1 = S_1 \cap \tau_2$  •  $P_2 = S_2 \cap \tau_1$ .

Per costruzione

$$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$$

ed esistono  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  (quali?) t.c.

$$\vec{OP_1} = t_1 \vec{OA}, \quad \vec{OP_2} = t_2 \vec{OB}$$



## Lemma di scambio

Sia  $Z = \{v_1, \dots, v_k\}$  e sia  $U = \langle Z \rangle$ .

Sia

$$0 \neq u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in U. \quad (*)$$

Allora se  $t_i \neq 0$  si ha

$$U = \langle Z \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$$

("Possiamo scambiare il generatore  $v_i$  di  $U$  con  $u$  a patto che  $t_i \neq 0$ ")

dim: Da (\*) segue che

$$v_i = \frac{1}{t_i} u - \frac{t_1}{t_i} v_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} v_{i+1} - \dots - \frac{t_k}{t_i} v_k$$

Quindi,  $v_i \in \langle Z \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$ . Ma anche

$v_j \in \langle Z \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle \quad \forall j \neq i$ . Quindi

$v_1, \dots, v_k \in \langle Z \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$ . Dato

che  $U$  è il più piccolo sottospazio

contenente  $v_1, \dots, v_k$ , segue che

$$U \subseteq \langle Z \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle \subseteq U. \quad \blacksquare$$

Es: Dimostrare che  $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

Sol.: Poiché  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$ ,  $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$   
dove  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Poniamo  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Allora

$\boxed{v_1 = 1e_1 + 2e_2}$ . Poiché il coefficiente di  $e_1$  è diverso da zero, dal lemma di scambio otteniamo  $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, e_2 \rangle$ .

Scriviamo  $\boxed{v_2 = t_1 v_1 + t_2 e_2}$ . Poiché  $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$ , segue che  $t_2 \neq 0$  e quindi, per il lemma di scambio, otteniamo

$$\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle. \quad \square$$

Es (Lemma di Scambio): Dimostrare che

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1-x, 1+x, 2-x+x^2 \rangle$$

dim: Sappiamo che  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1, x, x^2 \rangle$

Applichiamo ripetutamente il lemma di scambio. Poniamo:

$$u_1 := 1-x, \quad u_2 := 1+x, \quad u_3 := 2-x+x^2.$$

Poiché  $u_1 = 1-x$ , per il lemma di scambio

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, x, x^2 \rangle.$$

In particolare  $\exists t_1, t_2, t_3$  t.c.  $u_2 = t_1 u_1 + t_2 x + t_3 x^2$ .

Poiché  $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$  ed ha grado 1, concludiamo che  $t_2 \neq 0$  e  $t_3 = 0$ . Quindi, per il

lemma di scambio

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, x^2 \rangle.$$

Quindi  $\exists s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$  t.c.  $u_3 = s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 x^2$ .

Poiché il  $\text{gr}(u_3) = 2 > \text{gr}(u_1) = \text{gr}(u_2) = 1$

si ha che  $s_3 \neq 0$ . Quindi, per il lemma

di scambio  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle.$   $\square$

# DIPENDENZA / INDIPENDENZA LINEARE

## Definizione:

Diciamo che  $k$  vettori  $v_1, \dots, v_k \in V$  sono linearmente dipendenti se  $\exists t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  non tutti nulli t.c.

$$\boxed{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = 0_V.} \quad (*)$$

Diciamo anche che l'insieme  $\{v_1, \dots, v_k\}$  è linearmente dipendente.

L'equazione vettoriale (\*) si chiama una relazione di dipendenza lineare.

Es: L'insieme  $\{0_V\}$  è lin. Dip. Infatti,  
 $1 \cdot 0_V = 0_V$  è una rel. di dip. lin. non banale.

Es:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   
sono linearmente Dipendenti.

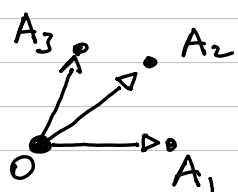
Infatti,  $-5v_1 + v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$ .

Es:  $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ ,

$$v_1 = 1 - x, \quad v_2 = 2x + x^2, \quad v_3 = 1 + x + x^2$$

sono lin. Dipendenti.

Infatti,  $v_1 + v_2 - v_3 = 0_V$ .

Es: I vettori geometrici   
sono lin. Dip. Infatti, sappiamo che

$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  t.c.

$$\overrightarrow{OA_3} = t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2}.$$

$$\Rightarrow t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{00}.$$

## Definizione

$v_1, \dots, v_k$  sono LIN. INDIPENDENTI

se non sono linearmente dipendenti,  
ovvero se l'unica relazione di  
dipendenza lineare tra di essi  
è triviale:

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0_V \Rightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$$

Diciamo anche che l'insieme  
 $\{v_1, \dots, v_k\}$

è linearmente INDipendente.

Es: Sia  $v \neq 0_V$ . Allora  $\{v\}$  è lin. Ind.

Infatti,  $tv = 0_V \Rightarrow t = 0$ .

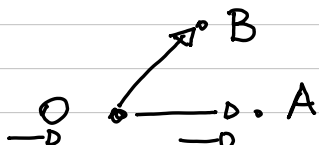
legge  
di annullamento

Es:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  è lin. Ind..

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 2t_2 = 0 \\ 2t_1 + 3t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1 = -2t_2 \Rightarrow -4t_2 + 3t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0.$$

Es: Siano  $A \neq O \neq B \in \mathbb{E}^2$  non allineati.



Allora  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  sono lin. Ind.

$$\text{Infatti, } t_1 \vec{OA} + t_2 \vec{OB} = \vec{OO}$$

$$\Rightarrow t_1 \vec{OA} = -t_2 \vec{OB}. \text{ Se } t_1 \neq 0, \text{ allora}$$

$$\vec{OA} = \lambda \vec{OB} \text{ per } \lambda = -\frac{t_2}{t_1} \neq 0. \text{ Quindi}$$

$\lambda \vec{OB} = \vec{OC}$  e  $C$  giace sia sull'asse  $OA$

che sull'asse  $OB$ . Quindi  $C = O \Rightarrow \lambda = 0$ .

Similmente se  $t_2 \neq 0$ .

Es:  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .  $v_1 = e^x$ ,  $v_2 = e^{2x}$ . Allora  
 $\{v_1, v_2\}$  è lin. Ind. Infatti

$$t_1 e^x + t_2 e^{2x} = 0_V$$

vuol dire

$$t e^x + t_2 e^{2x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare, per  $x=0$  e  $x=1$ , otteniamo

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1 e + t_2 e^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -t_1 \\ (1-e)t_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Es: I generatori standard  $1, x, \dots, x^n$  di  $K[x]_{\leq n}$   
 ed i generatori standard  $e_1, \dots, e_n$  di  $K^n$   
 sono linearmente indipendenti.

Infatti, per definizione di polinomi uguali:

$$0 + 0x + \dots + 0x^n = 0_{K[x]_{\leq n}} = t_1 \cdot 1 + t_2 x + \dots + t_{n+1} x^n \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \vdots \\ t_{n+1} = 0 \end{cases}$$

per definizione di matrici uguali:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n} = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \vdots \\ t_n = 0 \end{cases}$$

## Lemma di Dipendenza Lineare

$\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_k\}$  è linearmente Dipendente  
se e solo se  $\exists$  indice  $i$  t.c.  $v_i \in \langle \mathcal{L} \setminus \{v_i\} \rangle$   
se e solo se  $\exists$  indice  $i$  t.c.  $\langle \mathcal{L} \rangle = \langle \mathcal{L} \setminus \{v_i\} \rangle$

dim :

•) Se  $\mathcal{L}$  è lin. dip. esiste una relazione di dipendenza lineare

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0_k .$$

in cui non tutti i coefficienti sono nulli.

Sia  $i$  un indice t.c.  $t_i \neq 0$ . Allora

$$v_i = - \sum_{j \neq i} \frac{t_j}{t_i} v_j \in \langle \mathcal{L} \setminus \{v_i\} \rangle .$$

•) Se  $v_i = \sum_{j \neq i} t_j v_j$  allora

$$\sum_{j \neq i} t_j v_j - v_i = 0_v$$

è una relazione di dipendenza lineare.



## Lemma di Indipendenza Lineare

Sia  $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  lin. Ind. Allora  
 $\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  è lin. Ind.  $\Leftrightarrow v_k \notin \langle \mathcal{L} \rangle$ .

"Possiamo creare nuovi insiemi lin. Ind.  
da  $\mathcal{L}$ , aggiungendo un vettore che  
non appartiene a  $\langle \mathcal{L} \rangle$ ".

dim:

Se  $v_k \in \langle \mathcal{L} \rangle$  allora  $\{v_1, \dots, v_k\}$  è lin. DIP.  
per il lemma di dipendenza lineare.

Se  $v_k \notin \langle \mathcal{L} \rangle$  allora data un'eq. vettoriale

$$t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} + t_k v_k = 0_V \quad (*)$$

$t_k = 0$  per l'oss. FOND. Ma allora (\*)  
diventa

$$t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} = 0_V$$

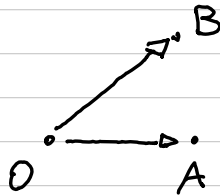
che implica  $t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1} = 0$ ,

poiché  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  è lin. Ind. .



Es:  $V = V_0^2$   $A \in E^2$ ,  $A \neq 0$ . Allora

$v = \vec{OA}$  è lin. Ind. Il lemma di indipendenza lineare dice che un vettore  $w = \vec{OB}$  forma con  $v$  un insieme lin. Ind. se e solo se  $w \notin \langle \vec{OA} \rangle$  se e solo se  $B$  non giace sulla retta per  $O$  e  $A$ .



sono lin. Ind.

Es: Polinomi di gradi distinti sono lin. Ind.

Infatti, osserviamo che se

$$p(x) = t_1 p_1(x) + t_2 p_2(x)$$

allora se  $(t_1, t_2) = (0, 0)$ ,  $p(x) = 0$

se  $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$  allora

$$g_2(p) \in \{g_2(p_1), g_2(p_2)\}. \text{ In particolare}$$

Se  $p_1(x), \dots, p_m(x)$  hanno gradi distinti,

allora  $p_i(x) \notin \langle p_j(x) \mid j \neq i \rangle$ .

Es (Soluzioni-base di sistemi ridotti):

Un sistema lineare in  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$

si dice ridotto se alcune variabili

$x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  sono espresse come

combinazione lineare delle altre

$(n-k)$  variabili.

$x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  = variabili dipendenti o dominanti

$\{x_j \mid j \neq i_1, \dots, i_k\}$  = variabili indipendenti o libere

Poniamo  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Il sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} x_{i_1} = \sum_{j \in [1, n] \setminus I} s_{i_1 j} x_j \\ x_{i_2} = \sum_{j \in [1, n] \setminus I} s_{i_2 j} x_j \\ \vdots \\ x_{i_k} = \sum_{j \in [1, n] \setminus I} s_{i_k j} x_j \end{cases}$$

$\forall j \in [1, n] \setminus I$  consideriamo la soluzione

$v_j$  ottenuta ponendo  $x_j = 1$  e

$x_\ell = 0 \quad \forall \ell \in [1, n] \setminus I$ . Queste  $n-k$  soluzioni

$v_1, \dots, v_k$  si dicono le soluzioni-base del sistema. Dal lemma di indipendenza lineare segue che  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti.

Facciamo un esempio numerico:

$$U: \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 + 4x_5 \end{cases}$$

Allora

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ -x_3 - 3x_4 + 4x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$

Soluzioni-base

$$v_3 \neq 0, \quad v_4 \notin \langle v_3 \rangle, \quad v_5 \notin \langle v_3, v_4 \rangle$$

$$\Rightarrow \{v_3, v_4, v_5\} \text{ è lin. ind.}$$

### Osservazione

Se  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  è lin. Ind.,  
allora ogni sottoinsieme non vuoto  
di  $B$  è lin. Ind.

"Essere lin. Ind. è chiuso per  
sottoinsiemi"

### Osservazione :

Sia  $Z = \{v_1, \dots, v_k\}$  un insieme di  
generatori per  $U = \text{Span}(Z)$ . Sia  
 $S = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \subset U$  un  
insieme che contiene  $Z$ . Allora  
 $U = \text{Span}(Z) = \text{Span}(S)$ .

"Essere generatori è chiuso per  
sopra-insiemi".

## TEOREMA FONDAMENTALE SULL' IND. LIN.

Sia  $\mathcal{Z} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$  e sia

$U = \langle \mathcal{Z} \rangle$ . Sia

$$\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_n\} \subset U$$

un insieme lin. IND. di vettori di  $U$ .

Allora  $n = |\mathcal{B}| \leq k = |\mathcal{Z}|$  ed

esistono indici distinti  $i_1, \dots, i_n$  t.c.

$$U = \langle \mathcal{Z} \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \cup \{z_1, \dots, z_n\} \rangle.$$

dim : Supponiamo, per arrivare ad una contraddizione, che  $n > k$ .

Siccome  $z_1 \in U \exists t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  t.c.

$$z_1 = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k.$$

Siccome  $\{z_1\}$  è lin. indep.,  $z_1 \neq 0_V$ . Quindi

$\exists$  un indice  $i_1$  t.c.  $t_{i_1} \neq 0$ . Per il

lemma di scambio

$$U = \langle \mathcal{Z} \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{z_1\} \rangle.$$

Poniamo

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z} \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{z_1\}.$$

Poichè  $z_2 \in U = \langle \mathcal{Z}_1 \rangle$ ,  $\exists t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  t.c.

$$z_2 = t_1 v_1 + \dots + t_{i_1} z_1 + \dots + t_k v_k$$

Se  $t_j = 0 \ \forall j \neq i_1$  si avrebbe  $z_2 = t_{i_1} z_1$ .

Ma questo contraddirebbe il fatto che  $\{z_1, z_2\}$  è lin. Ind. . Quindi,

$\exists$  un indice  $i_2 \neq i_1$  t.c.  $t_{i_2} \neq 0$ .

Per il lemma di scambio

$$U = \langle \mathcal{Z}_1 \setminus \{v_{i_2}\} \cup \{z_2\} \rangle$$

$$= \langle \mathcal{Z} \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \cup \{z_1, z_2\} \rangle$$

Poniamo

$$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_1 \setminus \{v_{i_2}\} \cup \{z_2\}.$$

Procedendo in questo modo, se  $k \leq n$ ,  
al  $k$ -esimo passo otteniamo

$$U = \langle \mathcal{Z} \setminus \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{z_1, \dots, z_k\} \rangle = \langle z_1, \dots, z_k \rangle.$$

Se  $K \neq n$  si avrebbe

$$z_{K+1} \in \langle z_1, \dots, z_K \rangle.$$

Questo contraddice il fatto che

$$\{z_1, \dots, z_{K+1}\}$$

è lin. Ind. . La contraddizione

è nata dall'ipotesi  $K < n$ . Quindi

$K \geq n$ , ed il teorema è dimostrato  $\square$

Es:

$$U = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$B = \left\{ z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Poiché  $z_2 \notin \langle z_1 \rangle$ , segue che  $B$   
è linearmente indipendente.

$$z_1 = v_2 - v_3, \quad z_2 = v_4 - 2v_3$$

Per il Teorema fondamentale:

$$U = \langle v_1, z_1, v_3, z_2 \rangle = \langle v_1, v_2, z_1, z_2 \rangle$$

COR :  $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$$\mathcal{Z} = \{ z_1, \dots, z_\ell \} \subset V.$$

Se  $\ell > k$  allora  $\mathcal{Z}$  è lin. DIP.

dim : Se  $\mathcal{Z}$  fosse linearmente indipendente allora, per il Teorema fondamentale sull'ind. Lin.,  $\ell \leq k$ .  $\square$

Es :  $\cdot) V = \mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle.$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \mathcal{Z}$  è lin. Dip.

$\cdot) V = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{Z} = \{ z_1, \dots, z_{n+1} \}$

$\Rightarrow \mathcal{Z}$  è lin. Dip.

$\cdot) V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}, \quad \mathcal{Z} = \{ p_1(x), \dots, p_{n+2}(x) \}$

$\Rightarrow \mathcal{Z}$  è lin. Dip.

Cor: Siano  $B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$  e  $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$  due insiemi linearmente Indipendenti di  $V$ .

Se

$$V = \langle B_1 \rangle = \langle B_2 \rangle$$

allora  $n = m$ .

dim :

Applicando il teorema fondamentale a

$\mathcal{L} = B_1$  e  $B = B_2$  otteniamo

$$n = |B_1| = |\mathcal{L}| \geq |B| = |B_2| = m.$$

Applicando il Teorema fondamentale a

$\mathcal{L} = B_2$  e  $B = B_1$  otteniamo

$$m = |B_2| = |\mathcal{L}| \geq |B| = |B_1| = n$$

Quindi  $m \geq n \geq m \Rightarrow m = n$ .



Def: Una base di  $V$  è un insieme finito  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  di vettori di  $V$  tali che

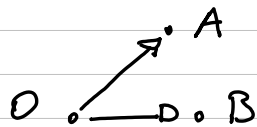
(B1)  $B$  genera  $V$ , i.e.  $V = \langle B \rangle$

(B2)  $B$  è lin. Ind..

Es:  $\cdot) \{e_1, \dots, e_n\}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$  che si chiama la base Standard di  $\mathbb{R}^n$

$\cdot) \{1, x, \dots, x^n\}$  è una base di  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  che si chiama la base Standard di  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ .

$\cdot) \text{ Dati } A \neq O \neq B \in \mathbb{E}^2 \text{ non collineati}$



$B = \{\vec{OA}, \vec{OB}\}$  è una base di  $\mathcal{V}_O^2$ .

COR (Riformulazione):

Tutte le basi di  $V$  hanno la stessa cardinalità.

Def: La dimensione di  $V$  è la cardinalità di una sua base e si denota con  $\dim_{\mathbb{K}} V$  oppure più semplicemente con  $\dim V$  (se il campo è chiaro)

Es:  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$

$\cdot) \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X]_{\leq n} = n+1$

$\cdot) \dim V_0^2 = 2$

$\cdot) \dim \{0_V\} =: 0$  (convenzione)

$\cdot) \mathbb{C}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Una sua base è  $\{1, i\}$  per cui  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .

D'altronde,  $\mathbb{C} = \langle 1 \rangle$  come  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale, per cui  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ .

Non tutti gli spazi vettoriali ammettono una base:

$V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $\forall n \geq 1$  l'insieme  
 $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}, \dots, e^{nx}\}$

è lin. Indipendente.

Ne segue che  $V$  non ammette  
un insieme finito di generatori.

In questo caso si dice che  
lo spazio vettoriale ha  
"dimensione infinita".

C'è però un'ampia classe di  
spazi vettoriali che ammettono  
una base:

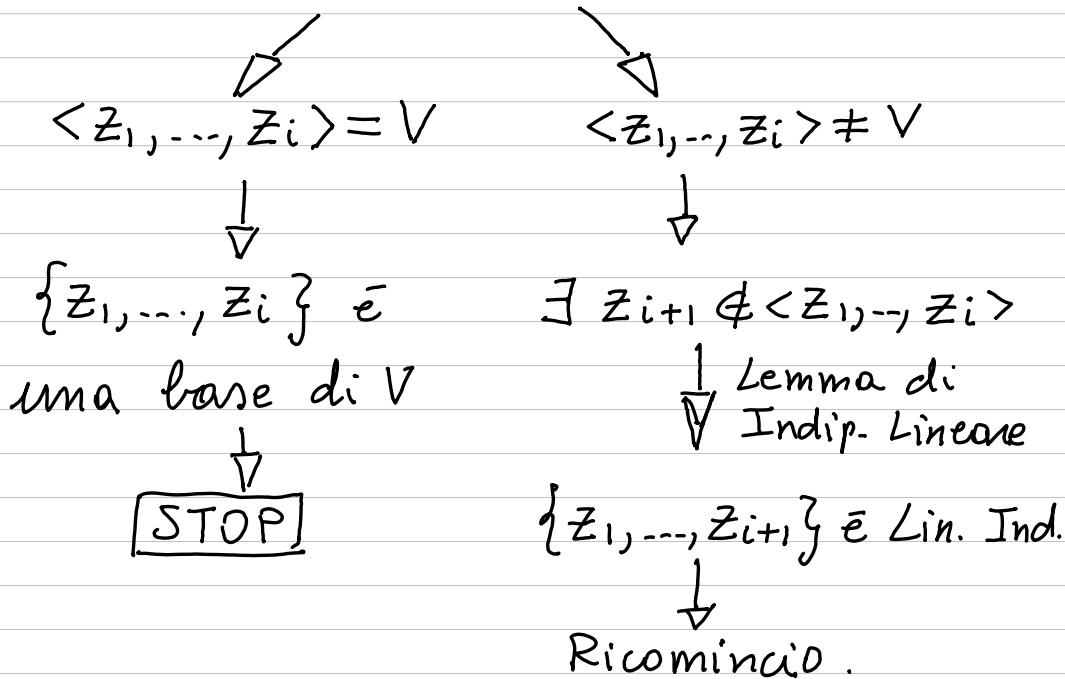
Def: Uno spazio vettoriale non-nullo  $V$  si dice finitamente generato se  $\exists v_1, \dots, v_k \in V$  tali che  $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ .

## TEOREMA

Uno sp. vett. fin. gen. ammette una base.

dim: Algoritmo di generazione di basi

Input:  $\{z_1, \dots, z_i\}$  lin. Ind.



Applicare l'algoritmo a  $\{z_i\} \neq \{0_V\}$ .

L'algoritmo Termina perché  $V$  è fin. gen. e quindi non possono esserci più di un numero finito di vettori lin. indep. .



Es: Trovare una base di  $V_0^2$ .

Sol.: Scegliamo un punto  $A \neq O$ .

$\{\vec{OA}\}$  è lin. ind.

$\langle \vec{OA} \rangle =$  " " retta per  $O$  e  $A$  " "  $V_0^2$ .

Scegliamo un punto  $B$  che non giace sulla retta per  $O$  e  $A$ .

$\Rightarrow \{\vec{OA}, \vec{OB}\}$  è lin. indep.

e genera  $V_0^2$  (l'abbiamo visto la volta scorsa).



Es:  $\mathcal{V}_0^3 = \{ \vec{OP} / P \in \mathbb{E}^3 \}$ : vettori geometrici dello spazio.  $\mathcal{V}_0^3$  ha una struttura di spazio vettoriale definita esattamente come quella di  $\mathcal{V}_0^2$ .

Cerchiamo una base:

Scegliamo un punto  $A_1 \neq O$ .

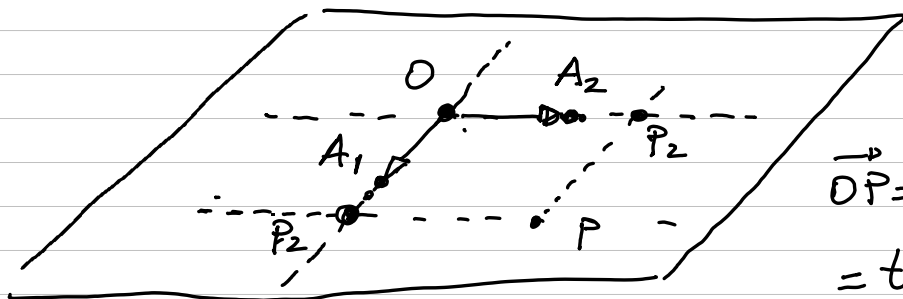
$\langle \vec{OA}_1 \rangle =$  "retta per  $O$  e  $A_1$ "  $\neq \mathcal{V}_0^3$

$r_{OA_1} =$  retta per  $O$  e  $A_1$ .

Scegliamo  $A_2 \in \mathbb{E}^3$ ,  $A_2 \notin r_{OA_1}$ .

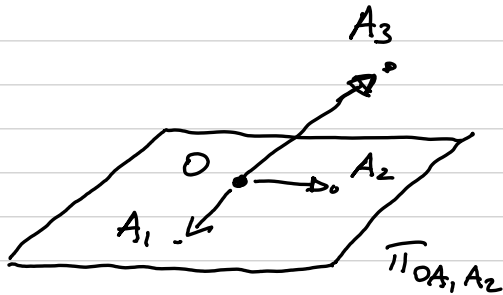
$\langle \vec{OA}_1, \vec{OA}_2 \rangle =$  "piano per  $O, A_1$  e  $A_2$ "  $\neq \mathcal{V}_0^3$

$\pi_{OA_1A_2} =$  piano per  $O, A_1$  e  $A_2$



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OP_1} + \vec{OP_2} \\ &= t_1 \vec{OA_1} + t_2 \vec{OA_2} \end{aligned}$$

Scegliamo  $A_3 \in \mathbb{E}^3$ ,  $A_3 \notin \pi_{OA_1A_2}$



$\Rightarrow \{ \vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_3} \}$  è lin. indep.

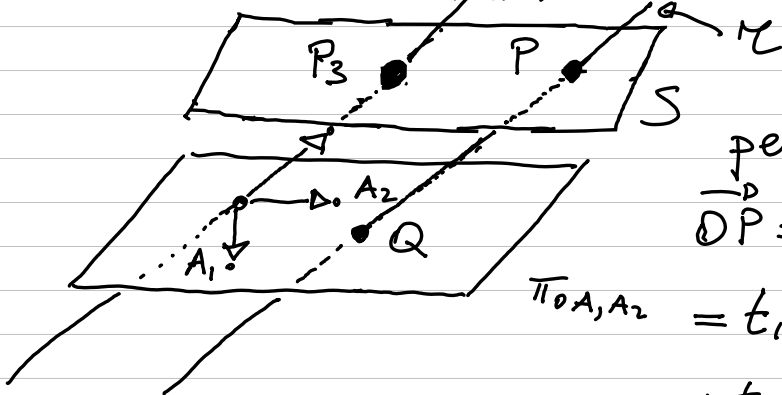
Vediamo che genera  $\mathbb{V}_0^3$ :

Sia  $P \in \mathbb{E}^3$ ,  $P \neq O$ .

$\mathcal{L}$  = retta per  $P$  parallela a  $\mathcal{L}_{OA_3}$

$S$  = piano per  $P$  parallelo a  $\pi_{OA_1A_2}$

$Q = \mathcal{L} \cap \pi_{OA_1A_2}$ ,  $P_3 = S \cap \mathcal{L}_{OA_3}$



per costruzione:

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP_3}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= t_1 \vec{OA_1} + t_2 \vec{OA_2} \\ &+ t_3 \vec{OA_3} . \quad \square \end{aligned}$$

A cosa serve una base?

Ad avere coordinate.

Prop. (Importante):

Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  lin. Ind..

Sia  $v \in \langle B \rangle$ . Allora i coefficienti di  $v$  nella sua scrittura come combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$  sono unici.

dim: Se

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

allora

$$(x_1 - y_1) v_1 + (x_2 - y_2) v_2 + \dots + (x_n - y_n) v_n = 0_V$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} B \text{ è} \\ \text{lin.} \\ \text{Ind.} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 - y_1 = 0, & x_2 - y_2 = 0, & \dots, & x_n - y_n = 0 \\ \text{ovvero} & x_i = y_i & \forall i = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

□

Se  $B$  è una base di  $V$  allora

$V = \langle B \rangle$  e quindi ogni vettore di  $V$  è combinazione lineare degli elementi di  $B$  e per la proposizione i suoi coefficienti sono unici.

Def: Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ .

Le coordinate di un vettore  $v \in V$  nella base  $B$  sono gli unici numeri  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  t.c.,

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n.$$

Le coordinate di  $v$  formano quindi un vettore  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  di  $K^n$ .

Abbiamo quindi una funzione:

$$F_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

che si chiama "funzione coordinate nella base B".

Oss :  $F_B$  dipende dalla scelta di una base  $B$  di  $V$ .

Prop. : La funzione  $F_B$  è biettiva (ovvero è iniettiva e suriettiva).

dim : 1)  $F_B$  è iniettiva :

$$F_B(v) = F_B(w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = w.$$

2)  $F_B$  è suriettiva :

Dato comunque  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$X = F_B(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n). \quad \square$$

Es: Dimostrare che  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$  e trovare le coordinate del vettore  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  nella base  $B$ .

Sol.: Dato che  $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = |B|$

è sufficiente far vedere che  $B$  è linearmente Ind.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2 = t \\ 1 = 2t \end{matrix} \quad \nexists$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow B$  è lin. indipendente.

Troviamo le coordinate di  $v$  in  $B$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 = x_1 + 2x_2, \quad 1 = 2x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2 \Rightarrow 1 = 2(1 - 2x_2) + x_2$$

$$\Rightarrow 1 = 2 - 4x_2 + x_2 = 2 - 3x_2$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow F_B \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

OSS1: Se  $\dim V = n$  e  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$   
genera  $V$  allora  $B$  è lin. Ind.

In effetti, se  $B$  fosse lin. Dip.  
esisterebbe i t.c.  $v_i \in \langle B \setminus \{v_i\} \rangle$

Ma allora

$$V = \langle B \rangle = \langle B \setminus \{v_i\} \rangle.$$

Poiché  $\dim V = n$  esiste un insieme  
linearmente indipendente che ha  
 $n$  elementi. Ma per il Teorema  
fondamentale dell'indipendenza lineare,

$$n \leq |B \setminus \{v_i\}| = n-1 \quad \text{✗}.$$



OSS2: Se  $\dim V = n$  e  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

è linearmente indep. allora  $B$  genera  $V$ .

Infatti, per ipotesi esiste un insieme di generatori di  $V$  di cardinalità  $n = |B|$ .

Se, per arrivare ad una contraddizione,  $\langle B \rangle \neq V$ , allora esisterebbe un vettore  $v \in V$ ,  $v \notin \langle B \rangle$ . Per il lemma di indipendenza lineare,  $B \cup \{v\}$  sarebbe linearmente indipendente. Ma questo contraddirebbe il teorema fondamentale sull'indipendenza lineare, poiché  $|B \cup \{v\}| > |B| = n = \text{numero di generatori}$ .

Es: Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{B} = (p_1(x) = 1 - x + x^2, p_2(x) = 1 + x - x^2, p_3(x) = 2 - 2x + 3x^2)$$

è una base di  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ .

Sol.: Poiché  $\dim V = 3 = |\mathcal{B}|$ , per l'OSS1,

basta dimostrare che  $\mathcal{B}$  è lin. Ind.

$$t_1 p_1(x) + t_2 p_2(x) + t_3 p_3(x) = 0_V \text{ se e solo se}$$

$$t_1(1 - x + x^2) + t_2(1 + x - x^2) + t_3(2 - 2x + 3x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

ovvero

$$(t_1 + t_2 + 2t_3) + (-t_1 + t_2 - 2t_3)x + (t_1 - t_2 + 3t_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

Questa uguaglianza di polinomi è vera se e solo se

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + 2t_3 = 0 \\ -t_1 + t_2 - 2t_3 = 0 \\ t_1 - t_2 + 3t_3 = 0 \end{cases}$$

Dimostriamo che questo sistema omogeneo

ha un'unica soluzione, ovvero che

$$\operatorname{rg} A = \text{numero di variabili} = 3$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + 2t_3 = 0 \\ -t_1 + t_2 - 2t_3 = 0 \\ t_1 - t_2 + 3t_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rg } A = 3 \Rightarrow$  non ci sono variabili libere

$\Rightarrow$  il sistema ha un'unica soluzione  
che è la soluzione nulla  $0_{\mathbb{R}^3}$ .

$\Rightarrow B$  è lin. ind.

Es: Dimostrare che l'insieme

$$B = \left( u_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -17 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

è una base del sottospazio vettoriale

$$U: \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

di  $\mathbb{R}^4$ .

Sol.:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \text{ref}(A).$$

$$\Rightarrow U = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \dim U = 2 = |B|.$$

( $v_1$  e  $v_2$  sono le soluzioni-base del sistema)

Osserviamo che  $u_1, u_2 \in U = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Poiché la 3<sup>a</sup> componente di  $u_1$  è 2 e la 4<sup>a</sup> è 3, otteniamo

$$u_1 = 2v_1 + 3v_2. \quad \text{Similmente, } u_2 = -v_1 + 2v_2.$$

$$U = \langle v_1, v_2 \rangle \stackrel{\text{lemma di Sambio}}{=} \langle u_1, u_2 \rangle \stackrel{\text{oss 2}}{=} \langle u_1, u_2 \rangle$$

$\Rightarrow B$  è una base di  $U$ .

Prop.: Se  $V$  ammette una base e  $U \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale non-nullo, allora anche  $U$  ammette una base.

dim:  $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \supset U \neq \{0_V\}$ .

Sia  $u \in U$   $u \neq 0_V$ . Applichiamo l'algoritmo a  $\{u\}$  in  $U$ . Dopo al più  $n$  passi l'algoritmo si ferma e produce una base di  $U$ .  $\square$

COR: Se  $U \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  e  $\dim V = n$ , allora  $\dim U \leq \dim V$ .

dim: Se  $U = \{0_V\}$  allora  $\dim U = 0$ .

Se  $U \neq \{0_V\}$ , per la proposizione,  $U$  ammette una base  $B_U$ . Ma allora  $B_U$  è un insieme lin. indipendente di  $V$ .

Per il Teorema fondamentale dell'ind. lin.

$\dim U = |B_U| \leq \dim V$ .  $\square$

Prop.: Se  $U$  è un s.sp. di  $V$  e  $\dim U = \dim V$  allora  $U = V$ . Se  $\dim U < \dim V$  allora  $U \subsetneq V$ .

dim: Sia  $B$  una base di  $U$ . Quindi

$B$  è un insieme lin. Ind. di vettori di  $V$ .

Se  $|B| = \dim U = \dim V$  allora  $B$  genera  $V$ .

Se  $|B| = \dim U < \dim V$  allora  $U = \langle B \rangle \subsetneq V$

perché altrimenti  $B$  genererebbe  $V$

e sarebbe quindi una base. Ma le basi

di  $V$  hanno cardinalità  $\dim V > |B|$ .  $\square$

## Teorema del completamento

Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$   
e sia  $Z = \{w_1, \dots, w_r\} \subset V$  un insieme  
lin. Ind.. Allora esistono  $n-r$   
vettori di  $B$  che uniti a  $Z$   
formano una base di  $V$ .

dim :

Applicare il Teorema fondamentale  
dell'indipendenza lineare all'insieme  
di generatori  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ed all'insieme  
lin. Ind.  $Z$ .  $\square$

(Soluzioni base di  $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$ )

## Formula di Grassmann

Dati  $U, W \subset V$  sottospazi vettoriali, allora  $U+W$  è un sottospazio vettoriale e vale la seguente formula:

$$(*) \quad \boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$$

dim:  $U+W$  è un s.p. vettoriale (Esercizio).

Supponiamo che  $U$  e  $W$  ammettano una base e dimostriamo la formula (\*).

Prendiamo una base  $B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_t\}$  di  $U \cap W$ .

estendiamo a

$B_U = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_\ell\}$  base di  $U$

$B_W = \{v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_p\}$  base di  $W$

(per cui  $\ell = \dim U$ ,  $p = \dim W$ ). Dimostriamo

che  $\{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_\ell, w_{t+1}, \dots, w_p\} = B$

è una base di  $U+W$ :

I)  $\mathcal{B}$  è lin. Ind. : Se  $\exists x_i, y_j, z_k \in \mathbb{R}$  l.c.

$$(\star) \underbrace{\sum_{i=1}^t x_i v_i}_{:=v} + \underbrace{\sum_{j=1}^{l-t} y_{t+j} u_{t+j}}_{:=u} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-t} z_{t+k} w_{t+k}}_{:=w} = 0_v$$

$$v + u + w = 0_v \quad \text{con } v \in U \cap W, u \in U, w \in W$$

$$\Rightarrow w = -v - u \in U \Rightarrow w \in U \cap W$$

$\Rightarrow w$  è combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_t$ :

$$w = \sum z_{t+k} w_{t+k} = s_1 v_1 + \dots + s_t v_t$$

$$\Rightarrow s_1 v_1 + \dots + s_t v_t - \left( \sum z_{t+k} w_{t+k} \right) = 0_v$$

$$\Rightarrow s_1 = \dots = s_t = z_{t+1} = \dots = z_p = 0$$

$\mathcal{B}_W \in \text{Lin Ind.}$

$$\Rightarrow w = 0_v.$$

$$\Rightarrow u + v = 0_v \Rightarrow v \in U \cap W$$

$$\Rightarrow \exists s_1, \dots, s_t \in \mathbb{R} \text{ l.c.}$$

$$\sum y_{t+j} u_{t+j} = s_1 v_1 + \dots + s_t v_t$$

$$\Rightarrow s_1 = s_2 = \dots = s_t = 0 = y_{t+1} = \dots = y_e$$

$\mathcal{B}_U \in \text{Lin Ind.}$

$$\Rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_t = 0.$$

In conclusione,  $B_{U \cap W}$  lin. Ind. la relazione (\*) ha l'unica soluzione banale. Ne segue che  $B$  è lin. Indipendente.

II)  $B$  genera  $U+W$ :

Sia  $v \in U+W$ . Allora  $\exists u \in U$  e  $w \in W$  t.c.

$$v = u + w.$$

Dato che  $B_U$  è una base di  $U$   $\exists s_1, \dots, s_e \in \mathbb{R}$ :

$$u = s_1 v_1 + \dots + s_t v_t + s_{t+1} u_{t+1} + \dots + s_e u_e$$

Dato che  $B_W$  è una base di  $W$   $\exists x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ :

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_t v_t + x_{t+1} w_{t+1} + \dots + x_p w_p.$$

Quindi

$$v = u + w = (s_1 + x_1) v_1 + \dots + (s_t + x_t) v_t$$

$$= (s_1 + x_1) v_1 + \dots + (s_t + x_t) v_t + s_{t+1} u_{t+1} + \dots + s_e u_e + x_{t+1} w_{t+1} + \dots + x_p w_p \in \langle B \rangle$$

□

Esercizio : Si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Osservare che  $U$  è un sottospazio vettoriale e calcolare  $\dim U$ ,  $\dim W$ ,  $\dim U \cap W$ ,  $\dim U + W$ .

Sol. :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$  si ha

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + 2x_2 + x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 + y_3) = 0$$

e quindi  $\alpha X + \beta Y \in U$  ed  $U$  è un s.sp. vett.

$x_1 = -2x_2 - x_3$ . Per  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 0$  si ottiene  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 1$  si ottiene  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Una base di  $U$  è  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\dim U = 2$ .

$\dim W = 2$  perché  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4 - \dim(U \cap W).$$

Quindi  $\dim U \cap W \geq 1$ . Inoltre  $\dim U \cap W \leq \dim U = 2$ .

Se  $\dim U \cap W = 2$  allora  $U = W$ . Ma  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$ .

Ne segue che  $\dim U \cap W = 1$  e  $\dim U + W = 3$ ,

ovvero  $U + W = \mathbb{R}^3$ .

$$\underline{Es} : U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Dimostrare che  $U$  è un sottospazio  
vettoriale e calcolare :

$$\dim U, \dim W, \dim(U \cap W), \dim(U + W)$$

Sol.:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 - x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Quindi  $U$  è un s.sp. vettoriale. Inoltre

$\dim U = 2$ , perché i due generatori

sono lin. ind.

Notazione:  $x_1 = -x_2 - x_3$  :  $x_1$  si chiama  
variabile dipendente o dominante.

$x_2, x_3$  : si chiamano variabili

indipendenti o libere.

Le soluzioni  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  di  $x_1 = -x_2 - x_3$  si chiamano soluzioni-base e si ottengono ponendo una variabile indipendente uguale a uno e l'altra uguale a zero.

$W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$  ha dimensione due perché i due generatori sono lin. Ind.

Dalla formula di Grassmann

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = 4.$$

Inoltre  $2 \leq \dim(U+W) \leq 3$ . Quindi ci sono solo 2 possibilità:

|                  |   |   |
|------------------|---|---|
| $\dim(U+W)$      | 2 | 3 |
| $\dim(U \cap W)$ | 2 | 1 |

Se  $\dim(U \cap W) = 2$ , allora  $U = W$ . Ma

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$  non soddisfa  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

Ne segue che  $\dim(U \cap W) = 1$  e  $\dim(U+W) = 3$ .

Quindi  $U+W = \mathbb{R}^3$ .

■

Es: In  $\mathbb{R}^4$  consideriamo il s.s.p. vettoriale

$$U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare una base  $B_U$  di  $U$  ed estenderla ad una base di  $\mathbb{R}^4$ , ovvero trovare un insieme  $S \subset \mathbb{R}^4$  tale che  $B_U \cup S$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ .

Sol.: Applichiamo l'algoritmo di generazione di basi ad  $U$ :

$u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ ,  $u_1 \in U \Rightarrow \{u_1\}$  è un sottoinsieme lin. ind. di  $U$ . Dobbiamo chiederci

$$\langle u_1 \rangle = U?$$

La risposta è no, perché  $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$ .

$\Rightarrow \{u_1, u_2\} \subset U$  è lin. ind.

$$\langle u_1, u_2 \rangle = U?$$

Vediamo se  $u_3 \in \langle u_1, u_2 \rangle$ :

$$u_3 = t_1 u_1 + t_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = t_1 - t_2 \\ -5 = -t_1 - t_2 \\ 7 = 2t_1 + t_2 \\ 5 = t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = t_1 - t_2 \\ -5 = -t_1 - t_2 \\ 7 = 2t_1 + t_2 \\ 5 = t_1 + t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 \\ -5 = -t_1 - t_2 \\ 7 = 2t_1 + t_2 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione. Quindi  $u_3 \notin \langle u_1, u_2 \rangle$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$  è lin. ind. e dato che genera  $U$ ,  $B_U = (u_1, u_2, u_3)$  è una base di  $U$ .

Cerchiamo un vettore  $v$  t.c.  $B_U \cup \{v\}$

è una base di  $\mathbb{R}^4$ . Per il lemma di indipendenza lineare,  $v \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$ .

Vediamo come sono fatti i vettori  $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

di  $U$ . Devono esistere  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$  t.c.

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = \underline{b}.$$

ovvero

$$\begin{cases} t_1 - t_2 + 5t_3 = b_1 \\ -t_1 - t_2 - 5t_3 = b_2 \\ 2t_1 + t_2 + 7t_3 = b_3 \\ t_1 + t_2 + 5t_3 = b_4 \end{cases}$$

La prima equazione è equivalente a

$$t_1 = b_1 + t_2 - 5t_3.$$

Sostituiamo nella seconda e otteniamo

$$t_2 = -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \quad (*)$$

Sostituiamo nella prima e otteniamo

$$t_1 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - 5t_3 \quad (**)$$

Sostituiamo (\*) e (\*\*) nella terza

$$t_3 = \frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{3}b_3 \quad (***)$$

Sostituiamo queste espressioni di  $t_1, t_2$  e  $t_3$  nella quarta e otteniamo

$$\boxed{b_2 = -b_4}$$

$$\text{Quindi } U = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \mid b_2 = -b_4 \right\}.$$

Possiamo scegliere  $v = e_2$ .

□

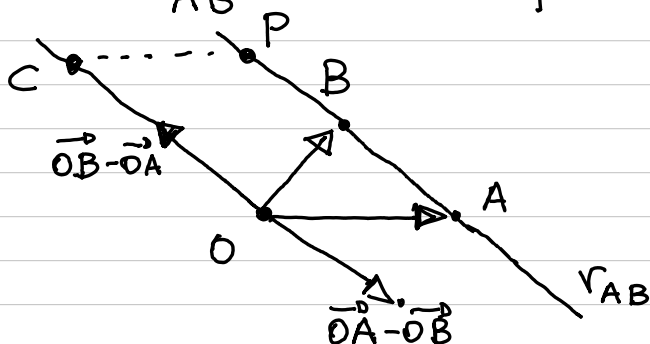
## Somme di sottospazi

Dati due sottoinsiemi  $U, W \subset V$  di uno spazio vettoriale  $V$  definiamo

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Es:  $V = \mathcal{V}_0^2$ ,  $A \neq O \neq B \neq A \in \mathcal{E}^2$ .

Sia  $r_{AB}$  la retta per  $A$  e  $B$ .



$\forall P \in r_{AB}$ , la differenza  $\vec{OP} - \vec{OA} = \vec{OC}$

è un multiplo di  $\vec{OB} - \vec{OA}$ , ovvero  $\exists t \in \mathbb{R}$

t.c.  $\vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$ .

Ne segue che

$$\begin{aligned} r_{AB} &= \{ \vec{OP} \mid P \in r_{AB} \} = \{ \vec{OA} \} + \langle \vec{OB} - \vec{OA} \rangle \\ &=: \vec{OA} + \langle \vec{OB} - \vec{OA} \rangle. \end{aligned}$$

Def: Un sottospazio affine di  $V$

è un sottoinsieme  $W \subset V$  della forma

$$W = v + W_0$$

dove  $W_0$  è un sottospazio vettoriale di  $V$

e  $v$  è un vettore di  $V$ .

OSS:  $\cdot$ )  $W$  è un s.sp. vett.  $\Leftrightarrow v \in W_0 \Leftrightarrow W = W_0$ .

$\cdot$ )  $W_0$  è univocamente determinato da  $W$ : Infatti,

$$W = v + W_0 = v' + W_0' \Rightarrow \forall w_0 \in W_0 \exists w_0' \in W_0' \text{ t.c.}$$

$$v + w_0 = v' + w_0' \Rightarrow w_0 = v' - v + w_0' \in W_0',$$

$W_0$  si chiama sottospazio di giacitura di  $W$ .

La dimensione di  $W$  è per definizione

$$\dim W := \dim W_0.$$

Se  $\dim W = 0$  allora  $W$  si dice un punto

Se  $\dim W = 1$  allora  $W$  si dice una retta

Se  $\dim W = 2$  allora  $W$  si dice un piano

Se  $\dim W = \dim V - 1$  allora  $W$  si dice iperpiano.

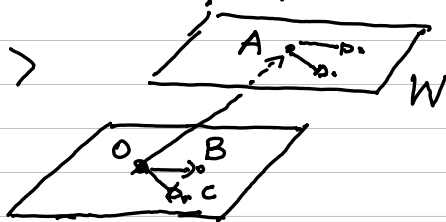
Se  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $W_0$ ,  
allora  $v_1, \dots, v_n$  si dicono vettori direttori di  $W$ .

### Sottospazi affini di $V_0^2$ :

- ) dimensione 0 :  $\{\vec{OP}\}$ . (punti)
- ) dimensione 1 : rette ;  $\forall B \neq A$   
 $\vec{OA} + \langle \vec{OB} - \vec{OA} \rangle$  retta pa  $A$  e  $B$ .
- ) dimensione 2 :  $V_0^2$ .

### Sottospazi affini di $V_0^3$

- ) punti (dimensione 0) :  $\{\vec{OP}\}$
- ) rette (dimensione 1) :  $\forall B \neq A$  :  
 $\vec{OA} + \langle \vec{OB} - \vec{OA} \rangle$
- ) piani (dimensione 2) :  $\forall B \neq O \neq C$  non allineati  
 $W = \vec{OA} + \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle$



- ) dimensione 3 =  $V_0^3$ .

Es:  $W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Dimostrare che  $W$  è un sottospazio affine, calcolarne la dimensione ed i vettori direttori.

Sol.: Scegliamo  $v \in W$ , ad esempio  $v = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Osserviamo che se  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$  allora

$$X - v = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ soddisfa } (x_1 - 1) - x_2 - x_3 = 0.$$

Poniamo  $W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$ .

Dimostriamo che  $W = v + W_0$ : se  $X \in W$

allora  $X - v \in W_0$ ; se  $X_0 \in W_0$  allora  $v + X_0 \in W$ .

Le soluzioni-base in  $W_0$  sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che  $W_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$ ,  $v_1$  e  $v_2$  sono vettori direttori di  $W$ :

$$\boxed{W = v + \langle v_1, v_2 \rangle}$$

Eq. parametriche di  $W$ .

## Sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$ (equazioni parametriche e autocisione)

Prop.: Sia  $W \subset \mathbb{K}^n$  un s.s.p. affine di dimensione  $k$ . Allora esiste un sistema lineare di  $(n-k)$  equazioni in  $n$  incognite  $(A|b)$  t.c.

$$W : (A|b)$$

dim:  $W = v + W_0$ .

Sia  $B = (v_1, \dots, v_k)$  una base di  $W_0$ .

Un vettore  $x \in \mathbb{K}^n$  giace in  $W$  se e solo se

$\exists w_0 \in W_0$  t.c.  $x = v + w_0$  se e solo se

$$x - v \in W_0 \quad \text{se e solo se}$$

$\exists t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$  t.c.

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = x - v$$

se e solo se il sistema  $(v_1 \dots v_k | x - v)$

è risolvibile se e solo se

$$\text{rg}(v_1 \dots v_k | x - v) = \text{rg}(v_1 \dots v_k) = k.$$

Poiché il rango non cambia per operazioni elementari sulle righe, sia  $S$  una matrice a scale t.c.

$$(v_1 \dots v_k | X-v) \rightsquigarrow S.$$

Allora

$$\text{rg } S = \text{rg } (v_1 \dots v_k | X-v).$$

$$S = \begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix} \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{matrix} & * \\ \hline \begin{matrix} 0 & & & \end{matrix} & \underbrace{x_1 A^1 + \dots + x_k A^k - b}_1 \end{array} \right]$$

$$\text{rg } S = k \Leftrightarrow x_1 A^1 + \dots + x_k A^k - b = 0_{\mathbb{K}^{n-k}}$$

Quindi

$$W: x_1 A^1 + \dots + x_k A^k = b.$$

□

Def:  $W: (A/b)$  si chiamano le  
equazioni cartesiane o la forma  
cartesiana di  $W$ .

$W = v + W_0$  si chiamano le  
equazioni parametriche o  
la forma parametrica di  $W$

Es: Calcolare equazioni cartesiane della retta

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \iff \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\iff$  il sistema nelle variabili  $\lambda$

$$\begin{cases} \lambda = x_1 - 1 \\ 2\lambda = x_2 + 1 \\ 3\lambda = x_3 - 2 \end{cases}$$

è risolubile

$\iff$

$$\operatorname{rg} \left( \begin{array}{c|c} 1 & x_1 - 1 \\ 2 & x_2 + 1 \\ 3 & x_3 - 2 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

Riduciamo  $\begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ 2 & x_2 + 1 \\ 3 & x_3 - 2 \end{pmatrix}$  a scala.

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & x_1 - 1 \\ 2 & x_2 + 1 \\ 3 & x_3 - 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c|c} 1 & x_1 - 1 \\ 0 & x_2 + 1 - 2(x_1 - 1) \\ 0 & x_3 - 2 - 3(x_1 - 1) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow W : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -3 \\ -3x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Es: Siano  $A, B \in \mathbb{K}^n$  distinti.

Dimostrare che il più piccolo sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$  che contiene  $A$  e  $B$  è la retta  $r = B + \langle A - B \rangle = A + \langle B - A \rangle$

Sol: Sia  $W = v + W_0 \subseteq \mathbb{K}^n$  un s.p. affine t.c.  $A, B \in W$ . Allora  $\exists w'_0, w''_0 \in W_0$  t.c.

$$A = v + w'_0 \quad e \quad B = v + w''_0.$$

$$\text{Allora } A - B = w'_0 - w''_0 \in W_0.$$

$$\text{Quindi } \langle A - B \rangle \subseteq W_0.$$

$$\text{Allora } B + \langle A - B \rangle \subseteq W.$$

$$\text{Inoltre } A = B + (A - B) \in B + \langle A - B \rangle.$$

Quindi  $B + \langle A - B \rangle$  è un sottospazio affine che contiene  $A$  e  $B$ . Ne segue che  $W = B + \langle A - B \rangle$ .

Es: Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r \subset \mathbb{R}^2$  passante per  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sol.:

$$r = A + \langle B - A \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} -1 & | & x-2 \\ -2 & | & y-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & | & x-2 \\ 0 & | & y-1-2(x-2) \end{pmatrix}$$

$$r: y - 1 - 2(x - 2) = 0$$

ovvero

$$r: -2x + y = -3$$

ovvero

$$r: 2x - y = 3$$